W.N.コッティンガム・D.A.グリーンウッド 著
樺沢宇紀 訳

素粒子標準模型入門

An Introduction to the
Standard Model of Particle Physics

丸善出版

Translation from the English language edition:
An Introduction to the Standard Model of Particle Physics
by W. N. Cottingham and D. A. Greenwood

目　次

序

素粒子物理の“標準模型”は，はかり知れない実験的な労力と，その結果に触発された理論的考察の集積の所産であって，その背景には50年以上の歴史的経緯がある．本書は標準模型のエレガントな理論体系を，簡単に分かりやすく紹介することを目的としている．CERN(セルン)でLHC (Large Hadron Collider)の建設計画が認可されたこともあり，標準模型は今後も活発な研究の対象であり続けるだろう．

この理論の美しさと簡明さは，ボゾン場を真の古典場として扱い，フェルミオン場を完全な反交換場として扱う“古典的な”水準でも認識できる．しかし理論の帰結と実験結果を比較するためには，場の量子化が必要である．この理論に基づいた多くの計算が，量子場の摂動論を用いて行われてきた．我々が本書で提示するのは，ほとんど最低次の摂動だけであり，繰り込みも必要ない．第8章の繰り込みの説明は表層的なものに過ぎない．このような事情は最後の第19章で言及する量子異常(アノマリー)の記述に関しても同様である．

標準模型の重要性とその成功の意義を充分に認識するためには，学部の講義で得られる程度よりもはるかに詳しい素粒子物理の知識が必要であり，それを手短に紹介することは難しい．しかし我々は本書において，この模型に基づいて得られた知見の概説を与え，その成功がもたらした知的興奮を伝えようと試みた．第1章に，定量的な理解が進んでいる今日の素粒子物理の概況について短い梗概(レジュメ)を与えた．その後の部分は理論を展開する章と実験データを紹介する章が混ざっている．関連するデータは膨大な量にのぼるので，我々は最も際立った実験結果だけを限定して提示するように努めた．本書で

引用される実験値は，特に別の出典を断っているものを除き，全般に Particle Data Group (1996) に依っている．

あらかじめ本書の読者に期待している数学的素養は，通常の学部の講義で身につく程度のものであるが，中でも行列を扱う能力は不可欠である．記憶の確認のために付録A に線形代数の概説を用意してある．対称性の原理は模型の構築において重要な役割を果たすので，対称性を記述する際に用いる群論の概念を付録B に自己充足的な形でまとめておいた．本書で必要とされる数学は技術的に難しいものではないが，読者は学部で扱うよりも抽象的な物理の理論形式を徐々に受け入れていかなければならない．テキストの記述の流れを乱す恐れのある数式の導出の多くの部分は，練習問題に回した (それらの解法の概要も巻末に示してある)．

本書の内容は Bristol 大学において，大学院の初年の学生に対して行った講義に基づいており，この水準の読者を想定している．しかしおそらく上級の学部学生にも，ある程度まで受け入れられるものと考えている．さらには素粒子物理を専攻する方々のみならず，物質界の究極の根源に対する現在の理解のあり方に関心を寄せる他の専攻分野の方々にも，広く読んで頂けることを望んでいる．

我々は Cambridge University Press の匿名閲読者の有益なコメントに感謝している．Bristol 大学の物理学科が我々の仕事に対して理解を示してくれたことにも勇気づけられた．Bristol 大学内外の多くの研究者たちが，我々が理解を深めることに貢献してくれた．注意深く正確にタイプ原稿を作成してくれた Mrs Victoria Parry にも謝意を表したい．彼女の貢献が無ければ本書の出版はあり得なかっただろう．

W. N. Cottingham
D. A. Greenwood

本書の表記について

座標関係の表記

- 3 次元空間内の位置ベクトルを $\mathbf{r}=(x,y,z)$ もしくは $\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3)$ のように書く．$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$ である．
- 一般のベクトル $\mathbf{a}$ の成分は (a^1,a^2,a^3) であり，$\hat{\mathbf{a}}$ は $\mathbf{a}$ 方向の単位ベクトルを表す．
- 3 次元空間内の微小体積要素を $\mathrm{d}^3\mathbf{x}=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ のように書く．
- 4 次元時空における事象の座標を $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(x^0,\mathbf{x})$ のように表す．$x^0=ct$ である．
- 4 次元時空における微小体積要素を $\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3=c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$ と書く．
- ギリシャ文字の添字 μ，ν，λ，ρ は，0，1，2，3 の値を取る．
- ラテン字の添字 i，j，k，l は空間軸方向に対応する 1，2，3 の値を取る．

Pauli 行列

σ^μ は $(\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ を，$\tilde{\sigma}^\mu$ は $(\sigma^0,-\sigma^1,-\sigma^2,-\sigma^3)$ を表す．

$$\sigma^0=\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$(\sigma^1)^2=(\sigma^2)^2=(\sigma^3)^2=\mathbf{I};\quad \sigma^1\sigma^2=\mathrm{i}\sigma^3=-\sigma^2\sigma^1,\quad \text{etc.}$$

γ 行列のカイラル表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

量子化 ($\hbar = c = 1$)

$$(E, \mathbf{p}) \to (\mathrm{i}\partial/\partial t, -\mathrm{i}\nabla), \quad \text{or} \quad p^\mu \to \mathrm{i}\partial^\mu$$

電磁場中の荷電粒子 (電荷 q) に関しては次の通り．

$$(E, \mathbf{p}) \to (E - q\phi, \mathbf{p} - q\mathbf{A}), \quad \text{or} \quad p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$$

$$\mathrm{i}\partial^\mu \to (\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu) = \mathrm{i}(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu)$$

電弱ゲージ場の混合

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos\theta_\mathrm{W} - B_\mu \sin\theta_\mathrm{W}$$

$$A_\mu = W_\mu^3 \sin\theta_\mathrm{W} + B_\mu \cos\theta_\mathrm{W}$$

ここで，$\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.2315(4)$ である．

$$g_2 \sin\theta_\mathrm{W} = g_1 \cos\theta_\mathrm{W} = e. \quad G_\mathrm{F} = g_2^2/\left(4\sqrt{2}M_\mathrm{W}^2\right)$$

記号一覧

$\mathbf{A}$	ベクトルポテンシャル (4.3 節)
A^μ	4 元電磁ポテンシャル (4.1 節)，ベクトル場 (4.9 節)
$A^{\mu\nu}$	ゲージ場の強度テンソル (11.3 節)
A_FB	前後非対称度 (15.2 節)
a	複素振幅 (3.5 節)，格子間隔 (17.1 節)
$a, a^\dagger$	ボゾンの消滅演算子，生成演算子 《 $[a_{\mathbf{k}\alpha}, a^\dagger_{\mathbf{k}'\alpha'}] = \delta_{\mathbf{kk}'}\delta_{\alpha\alpha'}$，8.1 節 》
$\mathbf{B}$	磁場
B^μ	ゲージ場 (11.1 節)
$B^{\mu\nu}$	ゲージ場の強度テンソル (11.2 節)
$b, b^\dagger$	フェルミオンの消滅演算子，生成演算子 《 $\{b_{\mathbf{p}\varepsilon}, b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} = \delta_{\mathbf{pp}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$，8.1 節 》

$\mathbf{D}$	アイソスピン2重項 (16.6節)
$d, d^\dagger$	反フェルミオンの消滅演算子，生成演算子《 $\{d_{\mathbf{p}\varepsilon}, d^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} = \delta_{\mathbf{pp}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$，8.1節》
d_k	$(k = 1, 2, 3)$ d型クォーク場 (14.2節)
$\mathbf{E}$	電場
E	エネルギー
e	電荷素量《 $e \approx 0.303$，p.113の微細構造定数 α 参照》
$\mathrm{e}, \mathrm{e}_\mathrm{L}, \mathrm{e}_\mathrm{R}$	電子の Dirac場，2成分左手型場，右手型場
$F^{\mu\nu}$	電磁場の強度テンソル (4.1節)
f	グルーオンの放射補正因子 (15.1節，17.4節)
f_{abc}	$SU(3)$ の構造定数 (B.7節)
$\mathbf{G}^\mu$	グルーオンゲージ場行列 (16.1節)
$\mathbf{G}^{\mu\nu}$	グルーオン場の強度テンソル (16.1節)
G_F	Fermi定数《 $G_\mathrm{F} \approx 1.166 \times 10^{-5}$ GeV^{-2}，p.127》
$g_{\mu\nu}$	計量テンソル (2.1節)
g	強い相互作用の結合定数 (16.1節)《 $g \sim O(1)$，p.212》
g_1, g_2	電弱結合定数《 $g_1 \approx 0.35$，$g_2 \approx 0.63$，p.148》
H	ハミルトニアン (3.1節)
$h(x)$	Higgs実スカラー場 (10.2節，11.3節)
$\mathcal{H}$	ハミルトニアン密度 (3.3節)
$\mathbf{I}$	アイソスピン演算子 (1.5節，16.6節)
$\mathbf{J}$	電流密度 (4.1節)
$\mathbf{J}$	全角運動量演算子
J	Jarlskog定数 (14.3節)《 $J \approx 2.9 \times 10^{-5}$，p.237》
J^μ	レプトン数カレント (12.4節)
$\mathbf{j}$	確率密度の流れ (7.1節)
j^μ	レプトン荷電カレント (12.2節)
K	弦張力 (17.1節)
$\mathbf{k}$	波数ベクトル
$\mathbf{L}$	レプトン2重項 (12.1節)
L	ラグランジアン (3.1節)
$\mathcal{L}$	ラグランジアン密度 (3.3節)
l^3	規格化体積 (3.5節)

$\mathbf{M}$	左手型スピノル変換行列 (B.6節)
M	陽子質量 (D.1節)
M_W	Wボゾンの質量《 $M_\mathrm{W} \approx 80$ GeV, p.147 》
M_Z	Zボゾンの質量《 $M_\mathrm{Z} \approx 91.2$ GeV, p.147 》
m	質量
$\mathbf{N}$	右手型スピノル変換行列 (B.6節)
N	粒子数演算子 (C.1節)
$\hat{O}$	量子力学的演算子
$\mathbf{P}$	場の全運動量
$\mathbf{p}$	運動量
Q^2	$= -q_\mu q^\mu$
$\mathbf{q}$	クォーク色 3 重項 (16.1節)
q^μ	エネルギー・運動量遷移 (17.3節)
$\mathbf{R}$	回転行列 (B.2節)
$\mathbf{S}$	スピン演算子 (4.7節)
S	作用 (3.1節)
s	重心系エネルギーの自乗《粒子 1, 2 の衝突実験では, $s = (p_{1\mu} + p_{2\mu})(p_1{}^\mu + p_2{}^\mu) = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$ 》
T^μ_ν	エネルギー・運動量テンソル (3.6節)
$\mathbf{U}$	ユニタリー行列
u_k	$(k = 1, 2, 3)$ u型クォーク場 (14.2節)
$u_\mathrm{L}, u_\mathrm{R}$	正エネルギーの 2 成分左手型, 右手型スピノル (6.1節)
u_+, u_-	正エネルギーの Diracスピノル (6.3節) 《 $u^\dagger_\pm(\mathbf{p})u_\pm(\mathbf{p}) = E_\mathbf{p}/m$, p.87 》
$\mathbf{V}$	小林-益川行列 (14.2節)
V	規格化体積, ハミルトニアンの相互作用項 (8.2節)
$\mathbf{v}$	速度
v	$= \lvert\mathbf{v}\rvert$
$v_\mathrm{L}, v_\mathrm{R}$	負エネルギーの 2 成分左手型, 右手型スピノル
v_+, v_-	負エネルギーの Diracスピノル (6.4節) 《 $v^\dagger_\pm(\mathbf{p})v_\pm(\mathbf{p}) = E_\mathbf{p}/m$, p.87 》
$\mathbf{W}^\mu$	ベクトルゲージ場行列 (11.1節)
$\mathbf{W}^{\mu\nu}$	場の強度テンソル (11.2節)
W^1_μ, W^2_μ	Wボゾン場 (11.2節)

W_μ^+, W_μ^-	Wボゾン場 (11.2節)
x	Bjorken のスケーリング変数 (17.3節，D.2節)
Z_μ	Zボゾン場 (11.3節)
α	微細構造定数《 $1/\alpha \approx 137.0$，p.113 》
$\alpha(Q^2)$	有効微細構造定数 (16.3節)
$\alpha_s(Q^2)$	強い相互作用の有効結合定数 (16.3節)
$\alpha_{\rm latt}$	格子結合定数 (17.1節)
α^i	Dirac行列 (5.1節)
β	Dirac行列 (5.1節)
β	$= v/c$
Γ	励起状態のエネルギー幅，崩壊頻度 (単位時間あたりの崩壊率)
γ^μ	Dirac行列 (5.5節)
γ	$= (1-\beta^2)^{-1/2}$
δ	小林-益川行列の位相角 (14.3節) 《 $\delta \approx 60^\circ(\pm 14^\circ)$，p.237 》
$\boldsymbol{\varepsilon}$	単位偏極ベクトル (4.7節)
ε	ヘリシティ添字 (6.5節)
θ	等速推進(ブースト)パラメーター：$\tanh\theta = \beta$，$\cosh\theta = \gamma$ (2.1節)，位相角，散乱角，スカラーポテンシャル (4.3節)，ゲージパラメーター場 (10.2節)
$\theta_{\rm W}$	Weinberg角《 $\sin^2\theta_{\rm W} \approx 0.231$ ($\theta_{\rm W} \approx 28.7^\circ$)，p.148 》
Λ^{-1}	閉じ込め距離 (16.3節)
$\Lambda_{\rm latt}$	格子パラメーター (17.1節)
λ_a	$SU(3)$ の生成子 (Gell-Mann行列) (B.7節)《 $\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}$，p.267 》
$\mu_{\rm L}, \mu_{\rm R}$	ミュー粒子の 2 成分左手型場，右手型場
$\nu_{e\rm L}, \nu_{\mu\rm L}, \nu_{\tau\rm L}$	電子ニュートリノ場，ミュー・ニュートリノ場，タウ・ニュートリノ場 (2 成分左手型場．右手型場は想定しない．)
Π	運動量密度 (3.3節)
ρ	電荷密度
$\rho(E)$	エネルギー E の終状態の状態密度 (8.3節)
Σ	Dirac場に作用するスピン演算子 (6.2節)
σ	断面積 (1.7節)

σ^μ	Pauli行列 (5.1節)
τ	平均寿命
τ^k	$SU(2)$ の生成子 (11.1節) 《 $\mathrm{Tr}(\tau^k\tau^l) = 2\delta_{kl}$，p.143 》
$\tau_\mathrm{L}, \tau_\mathrm{R}$	タウ粒子の 2 成分左手型場，右手型場
Φ	複素スカラー場 (3.7節)，(複素スカラー，もしくは複素スカラー 2 重項の) Higgs場 (第 10 章，第 11 章)
ϕ	実スカラー場 (2.3節)，スカラーポテンシャル (4.1節)
ϕ_0	(複素スカラー，もしくは複素スカラー 2 重項の) Higgs場の真空期待値の絶対値 (10.2節，11.3節)《 $\phi_0 \approx 180$ GeV，p.149 》
ϕ_1, ϕ_2	複素スカラー場の実部・虚部 (3.7節，10.2節)
ϕ_3, ϕ_4	複素スカラー場の実部・虚部 (11.1節)
χ	ゲージパラメーター場 (4.3節)，スカラー場 (10.3節)
ψ	4 成分 Dirac場
$\psi_\mathrm{L}, \psi_\mathrm{R}$	2 成分左手型，右手型スピノル場
$\bar{\psi}$	$= \psi^\dagger\gamma^0$ (5.5節)
ω	角振動数

(《 $\cdots$ 》の部分は訳者による補遺である.)

第 **1** 章

素粒子物理の概観

1.1 はじめに

J. J. Thomson(トムソン)が電子を発見してから既に 1 世紀以上が経過している．電子は現在も内部構造のない点粒子と見なされており，自然界において最も基本的な素粒子のひとつと考えられている．これに続いて発見された陽子や中性子なども当初は基本的な素粒子と考えられていたが，その後，これらの粒子は内部構造を持つことが明らかになった．

物質の究極的な構成要素は，どのような粒子なのか？ どのように分類されるのか？ どのように相互作用をするのか？ 素粒子を扱うのに相応しい数学理論は何なのか？ 電子の発見以降，特にこの半世紀の間に，これらの問題の解答を得るために実験的にも理論的にもはかり知れない労力が費やされてきた．素粒子物理における " 標準模型 " (Standard Model) は，このような営為の所産である．

標準模型によれば，宇宙における物質は基本的なフェルミオン (fermion：Fermi(フェルミ)粒子) から構成されており，これらの基本フェルミオンは相互作用を媒介する場の発生源になっていて，場を通じてフェルミオン間の相互作用が生じている．相互作用を媒介する場の量子はボゾン (boson：Bose(ボーズ)粒子) である．

相互作用を媒介する場は，表1.1 に示すように，その性質によって 4 種類に分類されている．素粒子物理で扱う尺度において重力は重要な役割を果た

表1.1　素粒子の相互作用を媒介する場の種類

場	ボゾン	スピン値
重力場	重力子 (graviton) を想定	2
弱い相互作用の場	W^+ ボゾン，W^- ボゾン，Z ボゾン	1
電磁場	光子 (photon)	1
強い相互作用の場	グルーオン (gluon) を想定	1

さず，標準模型は重力場を含まない模型となっている．電荷を持つフェルミオンの相互作用を媒介する電磁場の量子は，質量を持たない光子 (photon) である．フェルミオン間の“弱い相互作用”を媒介する場の量子 (ウィークボゾン) としては，電荷を持つ W^+ ボゾンと W^- ボゾン，および電荷を持たない Z ボゾンの 3 種類がある．これらの粒子は 1983年に CERN(セルン)[§]において発見された．W ボゾンと Z ボゾンには質量があるので，弱い相互作用は短距離力である．不確定性原理によると，相互作用の中間状態において現れる質量 M の粒子は $\hbar/Mc^2$ の時間だけ存在できて，その間にその粒子が移動できる距離は，最大 $\hbar c/Mc^2$ である．$M_{\mathrm{W}} \approx 80\ \mathrm{GeV}/c^2$，$M_{\mathrm{Z}} \approx 90\ \mathrm{GeV}/c^2$ なので，弱い相互作用の到達距離は $\approx 10^{-3}$ fm(フェムトメートル) となる ($1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$).

“強い相互作用”を媒介する量子，グルーオン[‡]は，光子と同様に質量がゼロであり，上記のように考えると無限遠まで到達するように思われる．しかしグルーオン場には電磁場とは異なる“閉じ込め”(confining) という性質があるために，強い相互作用は長距離力にならない．この性質については本書の後半で，多くの頁を割いて論じることになる．

標準模型では，基本的なフェルミオンが，まず 2 種類に大別される．“レプトン”と“クォーク”である*．すべての基本フェルミオンが $\hbar$ 単位で $\frac{1}{2}$ の

§ (訳註) Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire：欧州連合原子核研究所.

‡ (訳註) gluon．にかわ (接着剤) を意味する glue からつくられた造語.

* (訳註)“レプトン”(lepton) は“軽い”という意味のギリシャ語に由来しており，“軽粒子”と訳される場合もある．歴史的に，素粒子が質量によって軽粒子，中間子，重粒子に分類された時期があったことの名残りであるが，今日“レプトン”は「強い相互作用をしない基本フェルミオン」と規定されており，レプトン族の中で最も重いタウ粒子 (1777 MeV/c^2．1975年

スピンを持ち，単独粒子としては Dirac（ディラック）方程式によって記述されるが，これについては第 5，6，7 章で論じる．レプトンが関与する相互作用は電磁相互作用 (電荷を持つ場合) と弱い相互作用だけである．クォークの方は電磁相互作用，弱い相互作用に加えて，強い相互作用にも関わる．

1.2　標準模型の構築

素粒子の理論は如何なるものであれ，特殊相対性理論と整合していなければならない．Dirac は量子力学と電磁気学と特殊相対性理論を組み合わせて，現在広く“ Dirac 方程式 ”として知られている方程式を導き，その場を量子化することによって場の量子論 (quantum field theory) に到達した．場の量子論は，まず最初に電子と電磁場の相互作用を記述する量子電磁力学 (quantum electrodynamics：QED) において成功を収めた．第二次大戦後の時代に Feynman（ファインマン），Schwinger（シュウィンガー），朝永（ともなが），Dyson（ダイソン）などの物理学者たちが，理論の中に現れる発散の困難を処理する手法を確立して，QED を実験結果と驚異的な精度で一致する理論に仕上げた．QED については第 8 章において述べる．

標準模型は，その一部である QED と同様に，相互作用する場の理論である．我々が強調して示したい点は，標準模型の美しさと単純さである．これはボゾン場を古典的な場として扱い，フェルミオン場を完全に反交換する場として扱うような“古典的な”水準においても理解できるが，このモデルが実験データをよく記述できるかどうかを確かめるためには，場の量子化に基づいた計算が必要である．本書では簡明な読みやすさを保つために，最低次以外の摂動論の成果については，その結果だけを紹介するに留めることにする．

発見) は“ 重粒子 ”である陽子や中性子 (約 939 MeV/c^2) よりも重い．また中間子と重粒子 (これらは強い相互作用をするので，まとめて強粒子と呼ぶ) は現在では基本粒子と見なされていない (1.4 節)．“ クォーク ” (quark) は強粒子を構成する仮想粒子として 1964 年にこれを予見した M. Gell-Mann (ゲルマン) が，難解な実験的作風で知られるモダニズムの作家 J. Joyce の小説 *Finnegan's Wake* に出てくる鳥の鳴き声の擬声語を転用して象徴的に命名し，そのまま術語として定着したものである (小説中の「マスター・マークに 3（スリー）つのクォーク」という謎めいた言葉を，当初 3 種類の“ 香り ” (u, d, s) があると考えられた，この仮想粒子の状況への符合と見立てた)．

標準模型の構築の指針となるのは対称性の原理である．対称性を扱う数学的手法は群論 (group theory) によって与えられる．標準模型を構築する上で重要な群の性質を付録B にまとめてある．対称性と物理学との関係は深い．“Noether(ネーター)の定理”によると，自然界の持つあらゆる連続対称性に関して，それに対応する保存則が必ず存在している．たとえば空間と時間の一様等方性の仮定の下(もと)で，閉じた系のラグランジアン (Lagrangian) は空間・時間の任意の並進 (推進) 操作に関して不変である．したがってこのような並進操作は，この系における対称操作と見なされる．空間内の連続並進対称性は運動量保存則を，時間軸方向の連続推進対称性はエネルギー保存則をもたらす．対称性と対称性の破れの概念は，本書において大きな役割を持つことになる．

本章の残りの節において，標準模型によって説明しなければならない素粒子物理における発見の中で，特に重要なものを読者に思い起こしてもらう．そして第2章から標準模型の構築に必要な数学形式を論じ始めることにする．

1.3　レプトン

現在知られているレプトンを表1.2 に示す．電荷と質量を持つフェルミオンに関する Dirac方程式は，質量とスピンが全く同じで，電荷の符号とスピン方向に対する磁気能率(モーメント)の向きが反対の“反粒子”(antiparticle) の存在を同時に予言する．質量を持たないニュートリノ (neutrino：中性微子) ν に関する Dirac方程式も，反ニュートリノ $\bar{\nu}$ の存在を予言する．

電荷を持つレプトンの中では，電荷 $-e$ を持つ電子 e^- と，その反粒子 e^+ だけが安定である．ミュー粒子 (muon) μ^- とタウ粒子 (tau) τ^-，およびそれらの反粒子 μ^+ と τ^+ は，電子や陽電子と比べて質量が大きいことと，有限の寿命を持つ点が異なる．これらはすべて基本的な素粒子である．本書ではニュートリノの質量をゼロとして扱う．実験的にニュートリノにも極めて小さい有限の質量があることを示唆する状況があるが，ニュートリノの質量はまだ確定していない．ニュートリノの質量が完全にゼロでなければ，それは宇宙論においても重要な意味を持つことになる．ニュートリノが1種類で

表1.2　レプトンの種類

	質量 (MeV/c^2)	平均寿命 (s)	電荷
電子 e^-	0.5110	∞	$-e$
電子ニュートリノ ν_e	$< 15 \times 10^{-6}$	∞?	0
ミュー粒子 μ^-	105.658	2.197×10^{-6}	$-e$
ミュー・ニュートリノ ν_μ	< 0.17	∞?	0
タウ粒子 τ^-	1777	$(291.0 \pm 1.5) \times 10^{-15}$	$-e$
タウ・ニュートリノ ν_τ	< 24	∞?	0

はなく，e，μ，τ にそれぞれ対応する ν_e，ν_μ，ν_τ という種類 (世代[§]) があることについては，実験的に充分な証拠がある．

あらゆる素粒子の相互作用反応の過程において，電荷は必ず保存されるものと信じられている．ニュートリノの質量問題を措いておくと，素粒子反応の前後でレプトンは必ず同じ世代のレプトンに変わり，また同じ世代のレプトンと反レプトンが同時に生成したり消滅したりするように見える．たとえば次のような崩壊の実例がある．

$$\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

これが“レプトン数の保存”(conservation of lepton number) と呼ばれる性質である．反レプトンの数を負に数えると，標準模型においてレプトン数は，各世代ごとにそれぞれ保存し，同時に電荷も保存することは明白である (第19 章の考察は措いておく)．

1.4　クォークとクォーク系

現在知られているクォークを表1.3 に示す．標準模型において，クォークはレプトンと同様に Dirac方程式に従うスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンだが，その電荷は $2e/3$ もしくは $-e/3$ である．各クォークはそれぞれクォーク数 (1) を担っており，反クォークは負 (−1) に数える規則になっている．孤立した系に

[§] (訳註) generation．同じ世代に属する基本フェルミオンの組合せを“家族”(family) と呼ぶ．

表1.3　各クォークの性質

クォーク	電荷 (単位：e)	質量
アップ (up) u	2/3	2 – 8 MeV/c^2
ダウン (down) d	−1/3	5 – 15 MeV/c^2
チャーム (charmed) c	2/3	1 – 1.6 GeV/c^2
ストレンジ (strange) s	−1/3	100 – 300 MeV/c^2
トップ (top) t	2/3	168 – 192 GeV/c^2
ボトム (bottom) b	−1/3	4.1 – 4.5 GeV/c^2

おいて，正味のクォーク数の変化が観測されることはない．しかしそれぞれの“香り”(flavour) を持つクォーク数を別々に数えると，その数は保存されない．香りは弱い相互作用を通じて変化し得る‡．

クォークの実験的な研究が難しい理由は，単独のクォークを決して観測できないという点にある．クォークは常に複合系の中に閉じ込められており，そのような複合系は 1 fm 程度の拡がりを持つ．最も基本的なクォーク系は，正味のクォーク数が 3 の“重粒子(バリオン)”と，正味のクォーク数がゼロの“中間子(メソン)”である．陽子や中性子は重粒子(バリオン)である．中間子は強い相互作用によって一時的に束縛し合っているクォークと反クォークである．“強粒子(ハドロン)”という術語は，これらの閉じ込められたクォーク系の総称として用いられる*．

陽子は 2 個の u(アップ) クォークと 1 個の d(ダウン) クォークを含み (uud と表記)，中性子は 1 個の u クォークと 2 個の d クォークを含んでいる (udd)．陽子は唯一の安定な重粒子(バリオン)である．中性子は陽子よりも少し (1.3 MeV/c^2 ほど) 質量が大きくて，自由空間にある中性子は弱い相互作用によって陽子へと崩壊する．この崩壊反応は $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ と表され，中性子の平均寿命は約 15

‡ (訳註)“香り”(米国式綴りでは flavor) は表1.3 に示してある u，d，c，s，t，b というクォークの種類のことである．弱い相互作用は主として u ↔ d，c ↔ s，t ↔ b の遷移を起こす．

* (訳註) 長らく強粒子 (hadron) といえば重粒子 (baryon) か中間子 (meson) だけが具体的な対象であったが，2002年に兵庫県播磨の放射光実験施設 SPring-8 の実験グループによる“ペンタクォーク”(5 個もしくはそれ以上のクォークから成ると考えられる新たな強粒子) 発見の発表があってから，重粒子・中間子以外の“エキゾチック・ハドロン”(多クォーク系) への関心が高まった．しかしその後，他のグループから懐疑的な意見も出ている．

分である．

すべての中間子は不安定である．最も軽い中間子は π 中間子，もしくは“パイオン”(pion) と呼ばれている．電荷を持つ π^+ と π^- は，それぞれ $(\mathrm{u\bar{d}})$ および $(\mathrm{\bar{u}d})$ というクォーク-反クォーク対（つい）である．電気的に中性の π^0 は，$\mathrm{u\bar{u}}$ と $\mathrm{d\bar{d}}$ の 2 つの状態を等確率で含んでいる可干渉的（コヒーレント）な重ね合わせ $(\mathrm{u\bar{u}}-\mathrm{d\bar{d}})/\sqrt{2}$ である．π^+ と π^- の質量は 139.57 MeV/c^2，π^0 は少し軽く 134.98 MeV/c^2 である．これらに次いで軽い中間子は η (≈ 547 MeV/c^2) で，これは π^0 に直交するクォーク-反クォーク対の組合せ $(\mathrm{u\bar{u}}+\mathrm{d\bar{d}})/\sqrt{2}$ に $\mathrm{s\bar{s}}$ 成分も加わったものである．

1.5　軽いクォーク系のスペクトル

第 16 章で論じる予定だが，u クォークと d クォークの質量は，数 MeV/c^2 程度の極めて小さいもので，中間子や重粒子（バリオン）の質量よりも電子の質量に近い．1 fm 程度の領域に閉じ込められた u クォークと d クォークの運動量は，不確定性原理から $p \approx \hbar/(1\ \mathrm{fm}) \approx 200$ MeV/c ほどであり，これに伴うエネルギーは $E \approx pc \approx 200$ MeV 程度であって，ほとんどクォークの質量とは無関係にエネルギーが決まっている．全てのクォークは強い相互作用をする．したがって，軽いクォークから構成されるクォーク系の性質は，クォーク自身の質量にほとんど依存しない．近似的に $SU(2)$ のアイソスピン対称性 (isospin symmetry) が認められるが (16.6節)，これは標準模型の下で自明の性質である．

この対称性が完全に正確な形で成立しない理由は，クォークの質量と電荷が同じでないからである．クォークの質量の違いによる対称性の破れは，電磁的なそれを上まわる効果を生じている．u クォークが d クォークに入れ替わっているだけで，他は同じクォークから構成されている 2 つの粒子を比べると，必ず d クォークを含むほうが重い．たとえば中性子は陽子よりも重いが，陽子の電気的エネルギーに伴う質量 ~ 2 MeV/c^2 は，中性子内の電気的分布 (全体としては中性) に伴う質量よりも遥かに大きい．結論として，d クォークは u クォークよりも重いということになる．

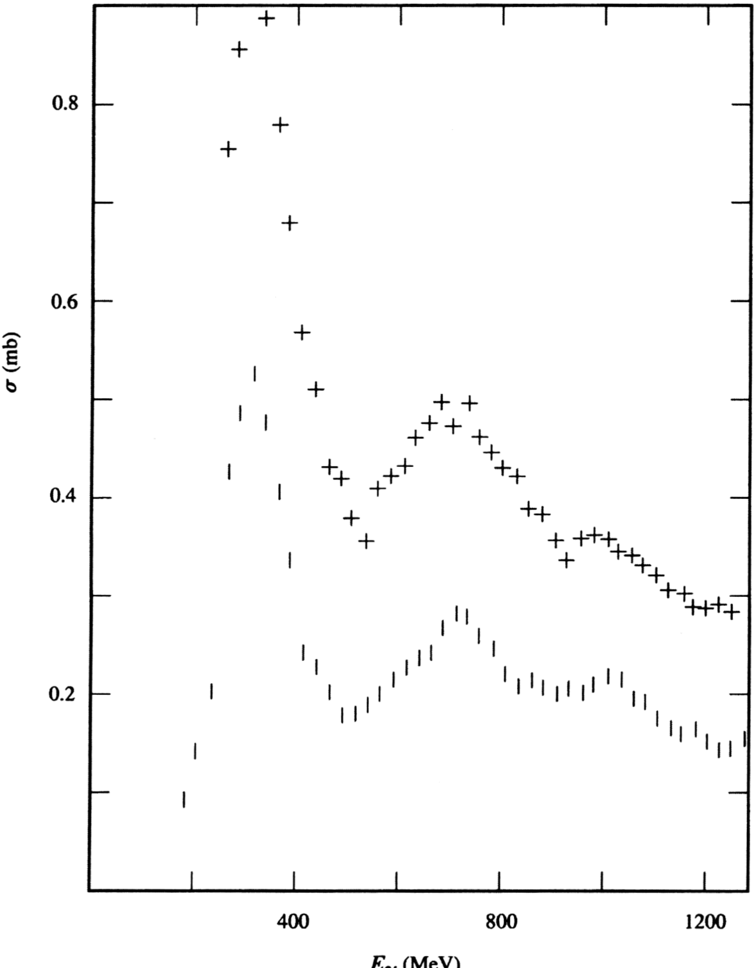


図1.1　陽子および重陽子 (deuteron：陽子 1 個，中性子 1 個から成る 2 核子系) を対象とした光子散乱による強粒子 (ハドロン) 生成実験の断面積のデータ．陽子のデータを“｜”，重陽子のデータを“＋”で示してある．近似的にこれらの断面積の差が，中性子を対象とした強粒子 (ハドロン) 生成の断面積に相当する．(Armstrong *et al.* 1972)

クォークが存在するという最初の証拠は，核子のスペクトル分析から得られた．陽子と中性子が多くの励起状態を持つことは，光子-核子散乱や π 中間

子-核子散乱における共鳴 (断面積[§]のピーク．図1.1参照) として観測される．軽いクォークを含む強粒子(ハドロン)の状態は，アイソスピンの概念を用いて分類できる．u クォークと d クォークは状態 $|\mathrm{u}\rangle$ と状態 $|\mathrm{d}\rangle$ の 2 重項 (doublet) と見なされ，$I = 1/2$，$I_3 = +1/2$ および $I_3 = -1/2$ である (表1.4, p.13)．したがって u クォークと d クォークで構成された 3 つのクォークを含む重粒子(バリオン)の全アイソスピンは $I = 3/2$ もしくは $I = 1/2$ となる．アイソスピン 3/2 の系は 4 状態の多重項 (multiplet) を形成し，各状態 (各粒子) の電荷は $2e$ (uuu)，e (uud)，0 (udd)，$-e$ (ddd) となるが，それらはエネルギー的にほとんど縮退している．$I = 1/2$ の系は陽子と中性子のような 2 重項を形成し，それらの電荷は e (uud) および 0 (udd) である．クォークに対する電荷の割り当ては，これらの重粒子(バリオン)の電荷を説明できるように決定された．

$I = 1/2$ と $I = 3/2$ の状態の，励起エネルギー 1 GeV までのエネルギー準位ダイヤグラムを図1.2 に示した[‡]．アイソスピン多重項を形成する各状態のエネルギーの違いは，わずか 1 MeV のオーダーに過ぎず，この図の尺度では無視してよい．しかし励起状態自体の幅 Γ はきわめて広く 100 MeV のオーダーである．これは励起の平均寿命の短さ $\tau = \hbar/\Gamma \sim 10^{-23}$ s に対応している．これらの励起状態はすべて，エネルギー的に強い相互作用を通じて崩壊するのに充分なものである．例えば $\Delta^{++} \to \mathrm{p} + \pi^{+}$ のような崩壊が起こる (図1.3)．

重粒子(バリオン)状態の豊富なスペクトル構造の大部分は，3 つのクォークから成る "殻模型" (shell model) によって理解できる．すなわちエネルギーが最も低

---

§ (訳註) 素粒子実験で扱われる断面積 σ と散乱頻度 Γ (もしくは寿命 τ) の意味と相互関係については p.17 訳註参照．

‡ (訳註) 図1.2 の説明にある N，Δ はそれぞれ量子数 $(I, B, S) = (1/2, 1, 0)$，$(3/2, 1, 0)$ の粒子を表す記号と見ることができる．B は重粒子数 (バリオン数)，S はストレンジネス (奇妙さ) である．S まで考慮すると，この他の重粒子記号として Λ，Σ，Ξ，Ω がある (それぞれ $(0, 1, -1)$，$(1, 1, -1)$，$(1/2, 1, -2)$，$(0, 1, -3)$)．記号の後に付く括弧付きの数字は，質量を MeV/c^2 単位で表した概数であって，図1.2 の左側の準位線は下から N(939)，N(1440)，N(1520)，N(1535)，$\cdots$ である．文中にあるようにアイソスピン多重項が含む準位は ~ 1 MeV/c^2 ほどの範囲に近接しているので (たとえば陽子は 938.27 MeV/c^2，中性子は 939.57 MeV/c^2)，質量を表す数字を整数にして端数を省き，その近傍にある多重項のエネルギーを代表させている．

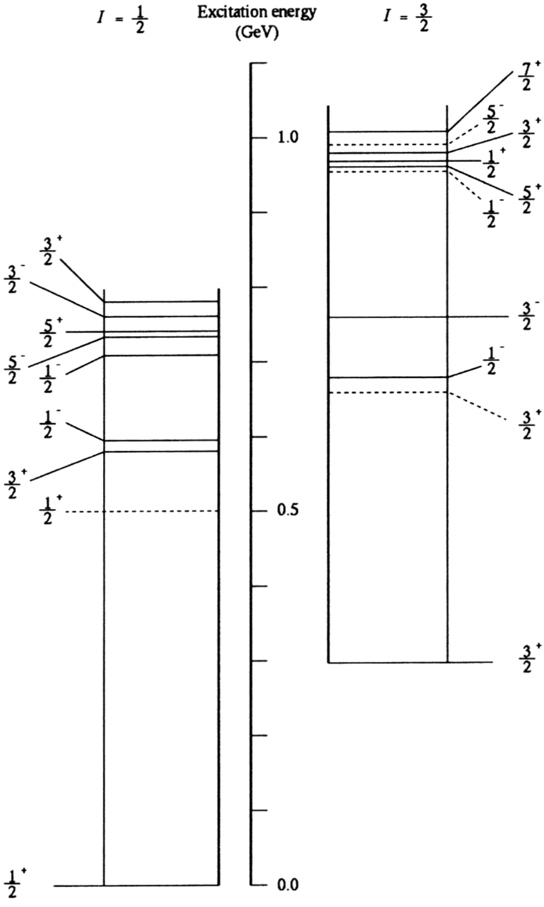


図1.2　核子 N および Δ 粒子と，その励起状態のエネルギー準位ダイヤグラム．それぞれアイソスピン 2 重項 ($I = 1/2$) の系列とアイソスピン 4 重項 ($I = 3/2$) の系列にあたる．各準位は全角運動量とパリティの組合せ J^{P} によって識別される．核子 2 重項 N(939) は系の基底状態であり，Δ(1232) が最もエネルギーの低い 4 重項である (p.9 訳註参照)．クォーク模型 (本文参照) によると，これらの 2 つの状態が，クォークが軌道角運動量を持たない ($L = 0$) 最も低エネルギーの状態である．励起準位の中で実線で示したものについては明確な解釈が成り立つ．これらはその次の $L = 1$ (パリティは負) と $L = 2$ (パリティは正) の状態である．破線で示した準位は単純な 3 クォーク模型では解釈できない準位であり，おそらくグルーオン場の励起状態に関係している．

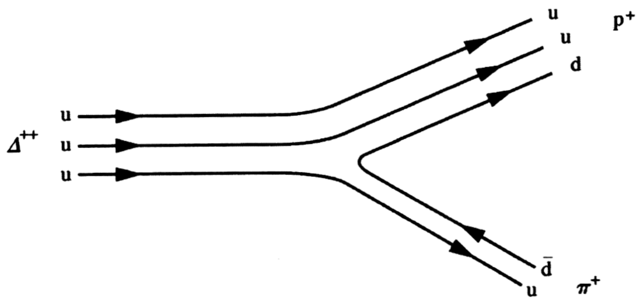


図1.3 クォーク模型に基づく崩壊 $\Delta^{++} \to \mathrm{p}+\pi^{+}$ のダイヤグラム．グルーオン場を明示していないが，グルーオン場がクォーク系を保持したり，$\mathrm{u\bar{d}}$対を生成したりする役割を担っている．

い基底状態は軌道角運動量が $L=0$ で正のパリティを持つ．次のエネルギー値の状態は $L=1$ で負のパリティを持つ，等々である．しかし奇妙なことに，この模型を実験データに合致させるためには，各状態が任意の 2 つのクォークの入れ替え操作に関して完全に対称でなければならない．たとえば最低エネルギーの $I=3/2$ 多重項に属する Δ^{++} (uuu) は $J^{\mathrm{P}}=3/2^{+}$ である (P はパリティ)．もし $L=0$ であれば 3 つのクォークのスピンは ↑↑↑ のように揃った対称な状態として $J=3/2$ を与えており，この基底エネルギーの空間内状態も全体として対称のはずである．フェルミオンの同種粒子系において，粒子の入れ替え操作に関する対称性は，本来許されないはずである！ しかしこの模型が対称性を必要とすることは疑いようがなく，クォーク交換の対称性を仮定すると，実験結果をよく説明できる．この問題に対する解答は，本章の後の方で提示する．スペクトルに見られる励起状態の中で，単純な殻模型によって理解できない状態 (図1.2 の破線) は，さほど多くない．

軽い u クォークと d クォークや，それらの反クォークから成る中間子も同じように豊富なスペクトル構造を持ち，アイソスピンによってその状態を分類できる．反クォークの I_3 は，対応するクォークの I_3 と反対の符号を持つ (表1.4, p.13)．アイソスピン加算則により，クォーク-反クォーク対(つい)のアイソスピンは $I=0$ もしくは $I=1$ である．$I=0$ の状態は電荷ゼロの 1 重項で，η がこの例である (図1.4(a))．$I=1$ の状態は π^{+}，π^{0}，π^{-} のように電荷 $+e$，0，$-e$ を持つ 3 重項を形成しており，それらのエネルギーはほとん

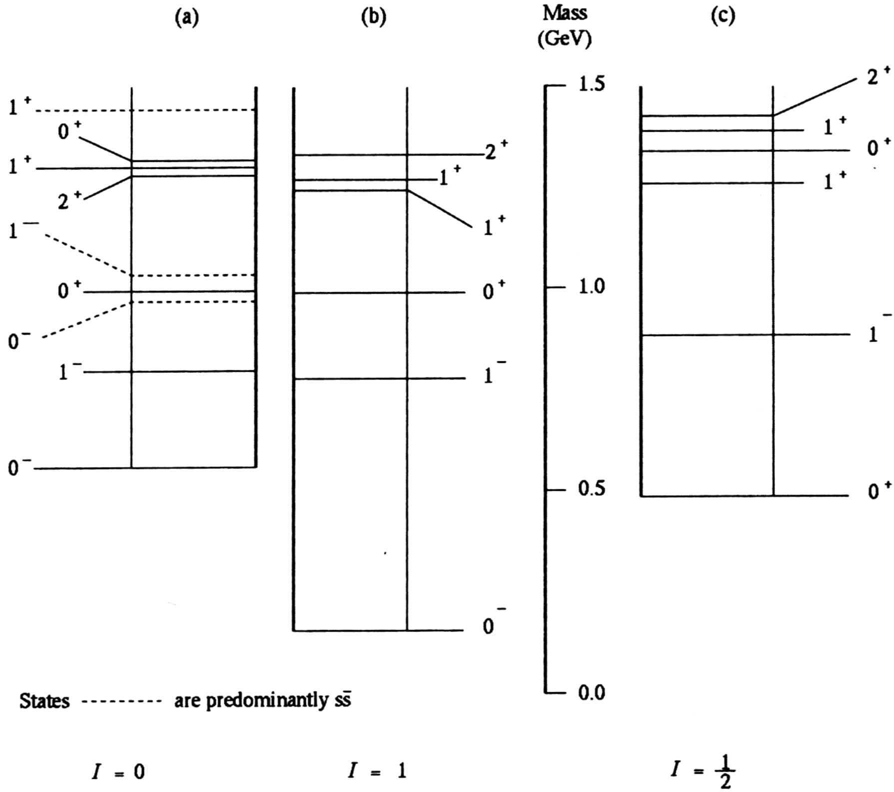


図1.4　クォーク-反クォーク系 $u\bar{u}$, $u\bar{d}$, $d\bar{u}$, $d\bar{d}$ はアイソスピン 3 重項 ($I = 1$) の系列 $u\bar{d}$, $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $d\bar{u}$ とアイソスピン 1 重項 ($I = 0$) の系列 $(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$ を形成する．(a) は最低エネルギーのアイソスピン 1 重項の準位のダイヤグラムで，破線は $s\bar{s}$ 状態と解釈される．(b) はアイソスピン 3 重項の準位のダイヤグラムである．(c) は最低エネルギーの K 中間子のエネルギー準位ダイヤグラムである．K 中間子はクォーク-反クォーク系 $u\bar{s}$ および $d\bar{s}$ で，アイソスピン 2 重項を形成しており，これらの反粒子状態 $s\bar{u}$ と $s\bar{d}$ もアイソスピン 2 重項を形成する．これらの準位が全体的に (b) の準位に比べて高いのは，主として s クォークの質量が u クォークや d クォークよりも大きいことによる．0^+ 状態が相対的に大きくずれている点に関しては，今のところ明確な解釈はなされていない．

ど縮退している．

$I = 1$ 状態の 1.5 GeV までのエネルギースペクトルを図1.4(b) に示してある．重粒子(バリオン)の場合と同様に，アイソスピン多重項を構成する各状態のエネ

表1.4　軽いクォークのアイソスピン量子数

クォーク	アイソスピン I	I_3
u	1/2	1/2
ū	1/2	−1/2
d	1/2	−1/2
d̄	1/2	1/2
s	0	0
s̄	0	0

ルギーの違いは数 MeV 程度に過ぎない．励起状態のエネルギー幅の方が広く 100 MeV のオーダーであることも重粒子(バリオン)と同様である．最低エネルギーの多重項 (π 中間子) では，クォーク-反クォーク対が $L=0$ の状態を形成しており，スピンは相殺してゼロとなっている．フェルミオンと反フェルミオンは相対的に反対のパリティを持つので (6.4節) $J^{\mathrm{P}}=0^-$ である．第 1 励起状態ではスピンが合成されて 1 となり，$J^{\mathrm{P}}=1^-$ である．この多重項は ρ 中間子にあたる．$L=1$ で合成スピン $S=1$ の下では 2^+，1^+，0^+ の状態が形成され，$L=1$ で合成スピン $S=0$ の場合は状態 1^+ が生じる．これらの状態をすべて図1.4(b) において確認することができる．

1.6　その他のクォーク

1940年代の後半に，π 中間子の発見に続いて“奇妙な”中間子と重粒子(バリオン)の一群が発見された．そこで u クォークと d クォークの他に，いわゆる“奇妙な”クォーク s が存在し，“奇妙な”粒子はひとつ以上の s(ストレンジ)クォークを含むことが推定されるに至った．重粒子(バリオン)や中間子が含む u クォークや d クォークを s クォークに置き換えると，奇妙な重粒子(バリオン)や奇妙な中間子となる．s クォークの電荷を d クォークと同様に $-e/3$ と考え，アイソスピンを $I=0$ と仮定すると，粒子の励起スペクトルをよく説明できる．

質量が最も小さい奇妙な中間子は，$I=1/2$ の 2 重項を形成する K^- (sū, 質量 494 MeV/c^2) と K^0 (ds̄, 質量 498 MeV/c^2) である．これらの反粒子同

士も，もうひとつの2重項を形成する．すなわち K^+ ($u\bar{s}$) と $\bar{K}^0$ ($\bar{d}s$) である．

このようなクォークの置き換えが，中間子のスペクトルに与える影響を図1.4に示してある．図1.4(b) は $d\bar{u}$ による一連の準位で，$d\bar{u}$ は電荷 $-e$ を持つ．図1.4(c) は奇妙な中間子 ($s\bar{u}$) のスペクトルである．これらの2つのスペクトルには，各準位の角運動量とパリティに対応関係がある．エネルギーの違いは，s クォークが u クォークや d クォークよりもはるかに重く，質量が 200 MeV/c^2 ほどもあることから生じている．

s クォークの質量が u クォークや d クォークに比べて極めて大きいために，奇妙な粒子の中の s クォークは不安定であり，弱い相互作用によって容易に崩壊する．

u，d，s クォーク以外にも，更に重いクォークがある (表1.3, p.6)．c(チャーム) クォーク (質量≈1.3 GeV/c^2, 電荷 $2e/3$)，b(ボトム) クォーク (質量≈4.3 GeV/c^2, 電荷 $-e/3$)，t(トップ) クォーク (質量≈180 GeV/c^2, 電荷 $2e/3$) である．これらのクォークの質量の大きさは驚くべきもので，レプトンの質量とは様子が違っている．最も捉え難い t クォークの実験研究は，まだ揺籃期にあると言える．しかし既知の6種類の香りを持つクォークから選んだ3つのクォークの組合せによって，あらゆる重粒子(バリオン)状態が形成されており (同様に3つの反クォークから反重粒子(バリオン)が形成される)，任意のクォーク-反クォーク対(つい)から中間子状態が形成されていると考えてよさそうである．

c クォークと b クォークは e^+e^- 衝突型加速器の中で発見された．e^+e^- 消滅断面積において，極めて顕著な狭い共鳴が観測されたのだが，その幅は 15 MeV 以下であり，u，d，s クォークから成る中間子状態とは明らかに違っていた．この共鳴状態には2種類ある．重心系エネルギーが 3 GeV ほどの一群は J/ψ 共鳴と呼ばれ，“チャーモニウム” (charmonium) $c\bar{c}$ と解釈される．10 GeV ほどのもう一方の一群は Υ(ウプシロン) 共鳴と呼ばれ，“ボトモニウム” (bottomonium) $b\bar{b}$ と解釈される[§]．現在知られている $c\bar{c}$ と $b\bar{b}$ のエネルギー準位を図1.5に示す．これらの系については第17章で論じる予定である．

---

§ (訳註) 歴史に即して言うと，J/ψ 共鳴は 1974年に Brookhaven 国立研究所における陽子-原子核 (Be) 衝突実験と，Stanford における e^+e^- 衝突実験によって，ほぼ同時に発見された．当初，前者のグループが J，後者が ψ と命名し，結局 J/ψ という呼称が定着した．Υ 共鳴は 1977年に Fermi 研究所における陽子-原子核衝突実験によって最初に発見された．

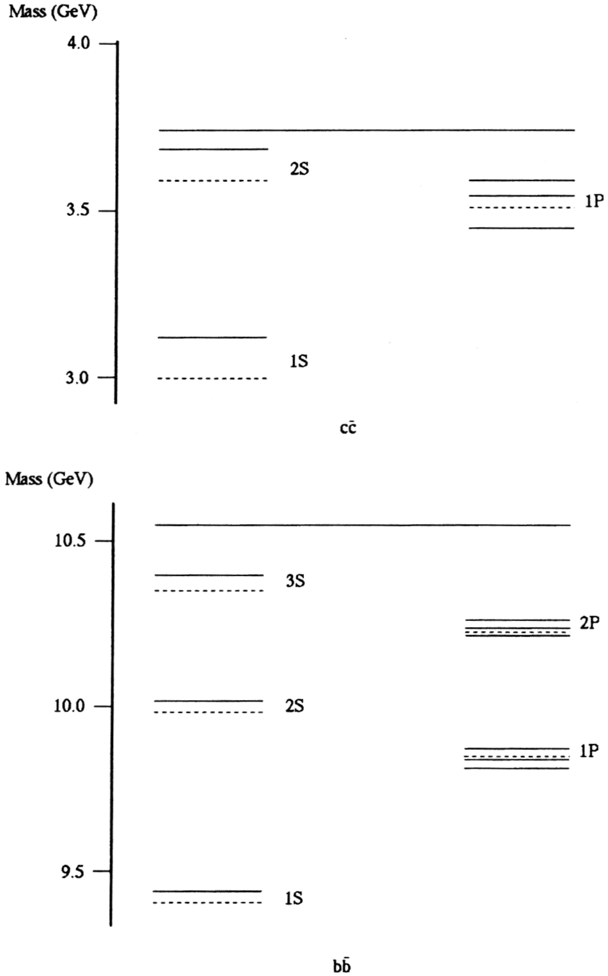


図1.5　チャーモニウム cc̄ とボトモニウム bb̄ の，強い相互作用によって中間子の対に崩壊 (cc̄ → cū + uc̄ など) する閾値未満におけるエネルギー準位のダイヤグラム．1S，2S，3S は軌道角運動量 $L = 0$ の状態，1P と 2P は $L = 1$ の状態である．内部クォークのスピンが結合して $S = 0$ になる場合，全角運動量は $J = L$ となる．これらの状態を破線で示したが，実験的に検出するのは難しい．内部クォークのスピン結合により $S = 1$ にもなり得るが，この状態を実線で示してある．スピン-軌道結合によって $S = 1$ の P 状態は分裂し，$J^{\mathrm{P}} = 0^+$，1^+，2^+ が生じる．この準位の分裂の様子は，図においても明確に見て取ることができる．すべての $S = 1$ 状態が，実際に観測されている．

tクォークの存在は，1995年にFermilab(Fermi研究所) における $\mathrm{p\bar{p}}$衝突実験によって確認された.

1.7　クォークの色

クォーク物理に関する多くの情報が，$\mathrm{e^+e^-}$衝突実験によって得られてきた．ここでは重心系エネルギー (centre of mass energy) の下限が 10 GeV，上限は Zボソン生成の閾値およそ 90 GeV までの実験について言及する.

$\mathrm{e^+e^-}$消滅の断面積 $\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mu^+\mu^-)$ は比較的容易に測定でき，その理論計算も第12章で説明する Weinberg-Salam の電弱理論に基づいて容易に行える．重心系エネルギーが 90 GeV よりも充分に低い場合，断面積は図1.6のFeynmanダイヤグラムで表される電磁的過程に支配される．ミュー粒子対は重心系において正反対の方向に生成されることになるが，$\mathrm{e^+e^-}$衝突型加速器の実験に関しては，実験室系と重心系が一致している.

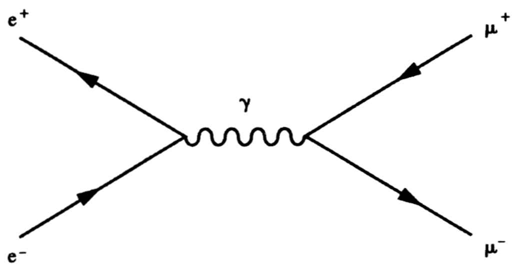


図1.6　$\mathrm{e^+e^-}$ の衝突による電磁的な $\mu^+\mu^-$ 対生成に関する最低次の Feynmanダイヤグラム (第8章参照).

微細構造定数 $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c)$ に関して最低次の項だけを考えると，非偏極の (unpolarised§) 入射ビームに対して，角度 θ の方向に運動するミュー粒子を生成する微分断面積は，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s}(1+\cos^2\theta)\sin\theta \tag{1.1}$$

§ (訳註) スピンの方向が乱雑になっているという意味.

となる．s は重心系エネルギーの自乗である (Okun 1982, p.205 参照)．式 (1.1) の導出において，各レプトンの質量は無視してある．θ に関して積分すると，全断面積は次式で与えられる[‡]．

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \tag{1.2}$$

図1.7 に示した量 $R(E)$ は，次のような比の値である．

$$R = \frac{\sigma\big(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to [\text{強い相互作用をする粒子(強粒子)}]\big)}{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{1.3}$$

低エネルギー領域では，多くの強粒子(ハドロン)状態が共鳴として現れているが，10 GeV から 40 GeV までの範囲においては，おおよそ $R \approx 4$ という定数になっているように見える．

クォークも基本的な素粒子であり，電荷の大きさの違いを除けば，ミュー粒子と同様に電磁力学に従う．10 GeV から 40 GeV の範囲で R の分子を支配する Feynman ダイヤグラムを図1.8 に示す (t クォークの質量は $\sim 180\ \mathrm{GeV}/c^2$ なので，ここでは寄与を持たない)．各クォーク過程に関して，式 (1.2) の中

---

‡ (訳註) 素粒子実験のデータは“断面積”σ [m^2] または“散乱 (反応) 頻度”$\Gamma = 1/\tau$ [s^{-1}] (もしくはエネルギー幅 $\Gamma = \hbar/\tau$ [J]．自然単位 $\hbar = 1$ では区別がなくなる) の形で与えられることが多いので，関係をまとめておく．標的粒子 t の集団全体 (体積 V．静止していると考えても，ビームの一部として一定の速度を持つと考えてもよい) に入射粒子 i の一様な流束を定常的に照射させておいて，特定の散乱モードに着目して観測した結果，頻度 Γ で散乱事象を検出したとする．この散乱の断面積は，

$$\sigma = \frac{\text{散乱頻度 [s}^{-1}\text{]}}{\text{標的粒子数 [無次元]} \times \text{入射粒子の流束密度 [m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{]}} = \frac{\Gamma}{V n_{\mathrm{t}} n_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{rel}}}$$

と定義される (参考までに [MKS 単位] を添えた．角度要素を限定して微分量として見る場合は $d\sigma$，$d\Gamma$ と置く)．n_{t}，n_{i} は標的粒子および入射粒子の密度，v_{rel} は標的粒子に対する入射粒子の速度である．つまり断面積は入射粒子の一様な流束の下で，標的粒子 1 個が散乱に与かる実効的面積という意味を持つ．崩壊反応の場合は標的個数 Vn_{t} を省けばよい (系の体積内での頻度ということになる)．通常 Γ や σ の計算の際には標的 1 個，入射粒子 1 個の初期状態を想定するが (崩壊の場合は粒子 1 個の初期状態．p.108 の訳註に挙げてある練習問題を参照)，量子力学的には粒子が体積 V の中で一様に確率分布しているものとして扱うので，計算の過程では n_{t}，n_{i} を確率密度と考えればよい ($n_{\mathrm{t}} = n_{\mathrm{i}} = 1/V$ とおく．$\sigma = V\Gamma/v_{\mathrm{rel}}$)．$V = 1$ と置いて V を省く場合も多い．微分断面積については p.128 訳註参照．

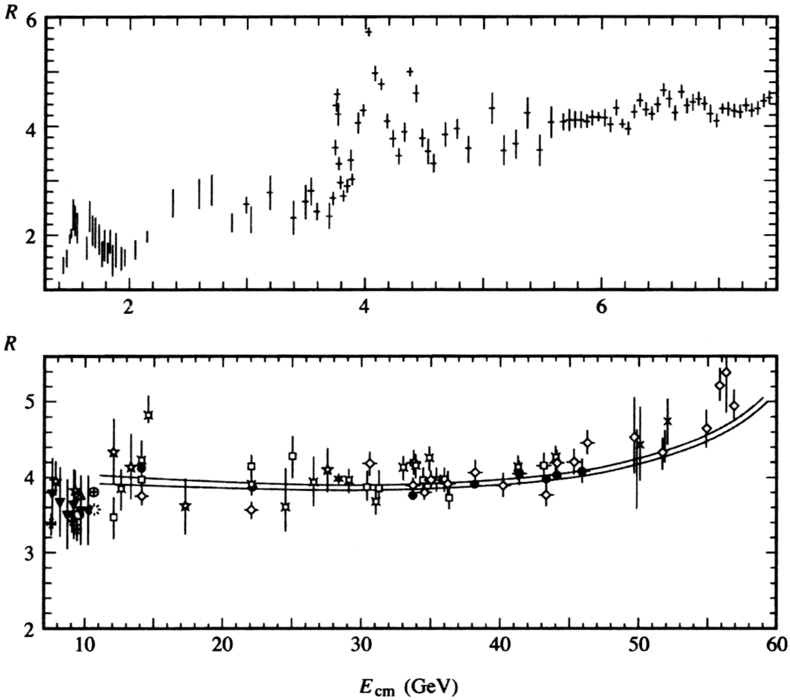


図1.7　$R(E)$ の測定結果. 1 GeV $< E <$ 11 GeV は共鳴を含む領域である. 11 GeV $< E <$ 60 GeV の範囲は, 目立った共鳴やクォーク-反クォーク対生成の閾値を含まない. $E >$ 11 GeV において示した 2 本の曲線は, クォークの色を考慮し, 電弱相互作用による補正と, 強い相互作用 (QCD) の効果を含めた計算結果を示したものである. (Particle Data Group 1996 による.)

で, クォークの結節点(ヴァーテックス)*に対応することになる電荷を, e からクォークの電荷に置き換えた式が成立する. これによると,

$$R = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9} \tag{1.4}$$

* (訳註) vertex (複数形 vertices). “頂点” と訳されることが多いが, “結節点” とする文献もある. 原語との対応関係としては前者の方が穏当だが, 後者の方が意味が分かりやすい. 図1.7 や図1.8 の Feynman ダイヤグラムでは, 2 本の矢印 (一方は入射, もう一方は放出方向) と 1 本の波線が結合しているそれぞれの三叉点がすべて vertex であり, その中で矢印がクォークを表すもの (図1.8 の各図右側) が, ここで対象とする “クォークの結節点” である.

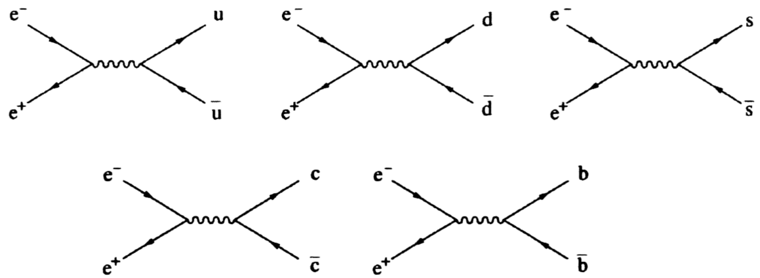


図1.8　Z 閾値以下のエネルギーにおける e^+e^- 衝突によるクォーク-反クォーク対生成過程を表す最低次の Feynman ダイヤグラム.

と推定されるが，この値は実験値の 1/3 程度でしかない.

標準模型においては，クォークの“色”(color) という概念を導入することによって，この食い違いが解消されている．クォークは香りの指標 u，d，c，s，t，b を持つだけでなく，色の指標も持つのである．色に関して 3 種類の基本的な状態 (種類) があるものと仮定し，これらを光の三原色になぞらえて便宜的に赤 (r：red)，緑 (g：green)，青 (b：blue) と呼ぶことにする．それぞれの香りに対して 3 種類の色を考えると，式 (1.4) を 3 倍しなければならず，

$$R = \frac{11}{3} \tag{1.5}$$

という値を得る．この計算値は，図1.7 のデータとよく一致している.

色の概念の導入によって R 値の問題が解決するだけでなく，重粒子（バリオン）状態の対称性の問題も解消するという点が重要である．我々は 1.5 節において，新たな量子数を導入しない限り，重粒子（バリオン）状態は 2 つのクォークの交換に関して完全に対称であることを見た．しかし交換するクォークの状態関数に，反対称な色状態の関数が掛かっているものと見れば，交換する関数全体も反対称となって，ここでも Pauli（パウリ）の原理が成立する.

図1.8 の Feynman ダイヤグラムの過程によるクォークの生成機構を強く支持する実験結果は，e^+e^- 衝突実験における別の特性からも与えられる．高エネルギーで e^+e^- を消滅させると，多くの強粒子（ハドロン）が生成される．これらは大抵，逆向きの 2 つの“噴射（ジェット）”(jet) の形で観測される．ひとつの例を図1.9

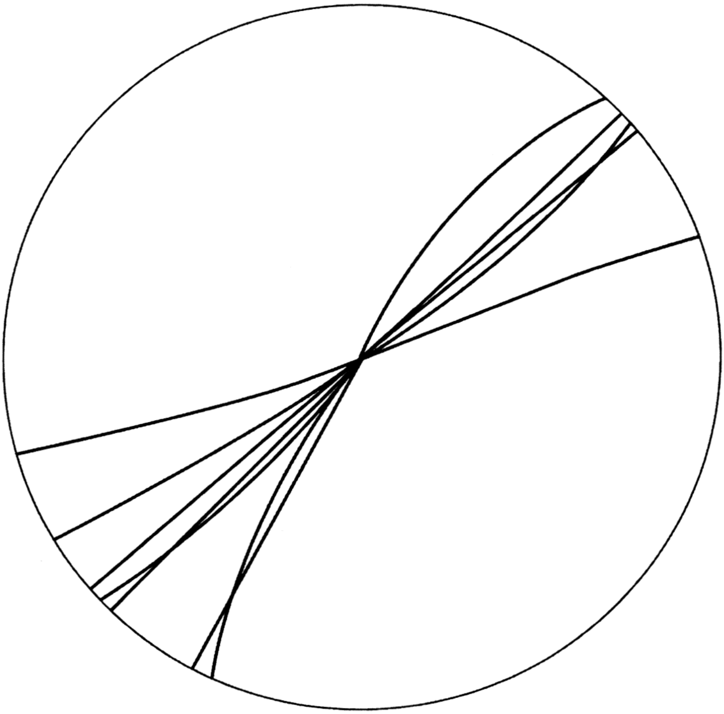


図1.9　e^+e^- 消滅によって 2 つの強粒子噴射 (ハドロン・ジェット) を生成した実験結果の実例．荷電粒子の飛跡を e^+e^- ビームに垂直な面に投影した図面である．DESY (Deutche Electronen Synchrotronen) 研究所の電子-陽電子加速器PETRA における TASSO測定器のデータ．

に示す (荷電粒子の飛跡は外部磁場のために曲がっており，その曲率は粒子の運動量に依存する)．ひとつの噴射(ジェット)の向きは，その生成点における強粒子(ハドロン)の全運動量の方向と定義される．逆向きの 2 つの噴射(ジェット)の運動量の大きさは等しく，方向は正確に反対を向いている．噴射(ジェット)の方向は，最初のクォーク-反クォーク対が生成された方向と考えられる．この解釈は，e^+e^- ビームによる多くの 2-噴射(ジェット)現象の，入射ビームに対する角度分布の検証からも裏づけられた．この分布は，高エネルギー領域において無視できなくなる Z ボゾン生成過程からの寄与を差し引いて見るならば，ミュー粒子生成の角度分布 (式 (1.1)) と同じである．

強粒子噴射（ハドロン・ジェット）は，e^+e^- 衝突から生じた最初のクォーク-反クォーク対に，真空から生じたクォーク-反クォーク対が加わって形成される．そこに含まれる過程の詳細は，未だ完全には理解されていない．

1.8　核子による電子の散乱

陽子や中性子を調べる手段として電子を用いることには明確な利点がある．電子は主として電磁的な力によってクォークと相互作用をするが，その相互作用の仕方が充分に理解されているからである．この散乱過程においては，特別に高エネルギー，大角度の散乱を除くと，弱い相互作用を無視してよいし，強い相互作用が直接に含まれることもない．

1950年代に Stanford で行われた，静止した核子を標的とした電子の散乱実験によって，陽子と (重陽子による散乱データから) 中性子の中の電荷分布が明らかになった．これらの初期の実験は，電子のエネルギーが ≤ 500 MeV の範囲内で行われた (Hofstadter *et al.* 1958)．陽子の中のクォークの挙動は，より高いエネルギーにおける散乱によって，更に明確さを増してきた．このエネルギー領域では，中間子を生成するような，非弾性の電子散乱が主要なモードとなる．

ドイツの Hamburg にある電子-陽子衝突型加速器 HERA（ヘラ）では，30 GeV の電子ビームが 820 GeV の陽子ビームと衝突する．電子-陽子衝突の多くの特徴は，1969年に Feynman が提唱した“部分子模型（パートン模型）”で記述できる．部分子（パートン）模型では，ビームの中の陽子が“部分子（パートン）”(parton[§]) と呼ばれる構成粒子から成る系と見なされる．ここで導入される仮想的な部分子（パートン）は，クォークや反クォークやグルーオンに相当するはずである．クォークと反クォークは電荷を担っている．部分子（パートン）模型の基本的な概念は，エネルギー・運動量遷移 Q^2 が大きいときに，電子は実効的に自由なクォークか反クォークによって散乱され，反跳するクォークや反クォークが周囲のクォーク，反クォーク，グルーオンなどと反応する時間を持つ前に，電子の散乱過程が完了してしまうという

[§] (訳註) part(部分)+on．Feynman による造語．

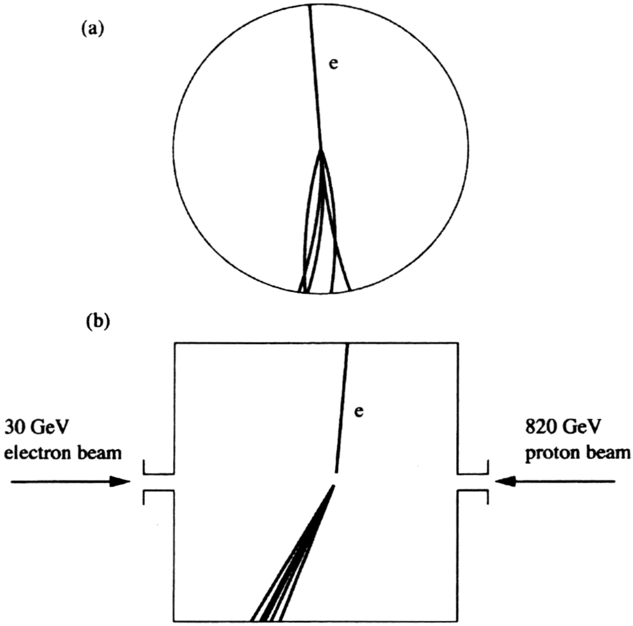


図1.10　DESY研究所において加速器HERA (Hadron Electron Ring Anlage) の ZEUS 測定器によって得られた，電子-陽子散乱から生じた素粒子の飛跡．(a) はビームに垂直な面に飛跡を投影した図，(b) はビームを含む面に飛跡を投影した図である．

電子の衝突によって，陽子から強粒子噴射 (ハドロン・ジェット) が生じている．反跳する電子の飛跡を e で表した．元々のビームと陽子の残骸の噴射はビーム管に収まり，検出器にはかからない．

ものである．したがって包含反応‡ の散乱断面積の計算に，最終的な強粒子(ハドロン)状態は関与しない．

この模型では Q^2 が大きいときに，衝突した電子もクォークも大きな角度で偏向する．図1.10 は加速器HERA で ZEUS測定器が捉えたデータの例である．散乱された電子が持つ横方向の運動量は，反跳したクォークから生じた

‡ (訳註) inclusive interaction：粒子の多重発生が起こるような散乱過程において，特定の 1 種類の粒子の発生だけに着目して，その他に何が発生しても区別をしないという見方をする場合に，その反応を包含反応と称する．逆に，発生する全粒子の種別を特定して区別する場合，これを排他反応 (exclusive interaction) と呼ぶ．Feynman による命名．

強粒子噴射(ハドロン・ジェット)のそれと釣り合っている．もう一方の噴射(ジェット)，すなわち“陽子の残骸”の噴射(ジェット)は，陽子ビームに対して小さな角度の範囲に収まっている．部分子(パートン)模型の正当性は，これに類する諸現象によって強く支持されている．

実験データを解釈する上での部分子(パートン)模型の成功は，クォークの概念を支持するものでもある．部分子(パートン)模型は厳密には，本書の主要なテーマに含まれるものではないが，興味深くもあり，素粒子物理において重要でもある．この模型の簡単な解説と，実験結果との関連を付録D に与えることにする．

1.9　素粒子の加速器

自然に対する我々の理解は，理論と実験との協力関係によって進展してきた．素粒子物理における現代の実験は，主として巨大な素粒子加速器と，巧妙で複雑な素粒子検出器に依存している．このような実験施設の建設は，1930年代初頭における英国 Cambridge の Cockroft-Walton線形加速器と，米国 Berkeley の Lawrenceサイクロトロンの建設から始まっている．当時の Cambridge の加速器は陽子を 0.7 MeV まで加速し，Berkeley の最初のサイクロトロンは，陽子を 1.2 MeV まで加速した．1945年以降の一時期には，宇宙線を高エネルギー粒子源として利用し，写真感光剤を用いて粒子を検出する手法によって，重要な結果が得られた．しかし 1950年代になると，新しい加速器を用いて，より高いエネルギーのビームが得られるようになった．現在稼動している加速器と，計画中の加速器の一部を表1.5 に掲げてある．これらの加速器に関する詳しい情報は Particle Data Group (1996) において見出すことができる．

最近 Fermilab (Fermi研究所) の TEVATRON(テヴァトロン) によって，t クォークが発見された (1995)．t クォークの実験研究は，まだ緒についたばかりである．これは標準模型の基本的な部分を占める存在だが，本書ではわずかしか触れていない．グレードアップした CERN の加速器LEP(レップ) 2[§]は，W^+W^-対(つい)を生成することができるので，弱い相互作用に関する詳しい研究を可能にするであろう．Stanford では荷電共役(きょうやく)変換・パリティ変換 (CP) 対称性の破れを研究

§ (訳註) LEP は Large Electron Positron collider の略.

表1.5　素粒子の加速器

加速器の名称 (研究所名, 所在地)	衝突させる粒子	稼動開始年
TEVATRON (Fermilab, Batavia)	p : 900 GeV $\bar{\mathrm{p}}$: 900 GeV	1987年
SLC (SLAC, Stanford)	e^+ : 50 GeV e^- : 50 GeV	1989年
HERA (DESY, Hamburg)	e : 30 GeV p : 820 GeV	1992年
LEP2 (CERN, Geneva)	e^+ : 81 GeV e^- : 81 GeV	1996年
PEP-II (SLAC, Stanford)	e^- : 9 GeV e^+ : 3.1 GeV	1999年
LHC (CERN, Geneva)	p : 7 TeV p : 7 TeV	2007年 (?)

する目的で，加速器PEP-IIと“BaBar(ババール) ($\mathrm{B\bar{B}}$) 測定器”が設計された‡．標準模型における CP 対称性の破れの発現については第18章で議論する．

近い将来に建設される最も野心的な加速器はCERNのLHC (Large Hadron Collider) である．もしHiggs(ヒッグズ)ボゾンという粒子が存在していれば，この加速器によって観測することが可能になるものと期待されている．Higgsボゾンは標準模型の基本的な構成要素のひとつであるが，この話題は第10章で取り上げる．また，おそらくはLHCで達成される14 TeVまでのエネルギーに

‡ (訳註) 加速器名のPEPはPositron-Electron Projectを意味する．ここで大量のB中間子を発生させ，確率の低い崩壊過程までを測定して CP 対称性の破れを研究する (18.5節参照)．同様の意図で建設された日本のKEKB (高エネルギー加速器研究機構Bファクトリー加速器) − Belle測定器も同年に稼動を開始し，PEP-II − BaBarの実験を上回る輝度 (ルミノシティ) を達成して注目を集めている．

おいて，標準模型の背後にある“超対称性”(Supersymmetry) の物理が明らかになるものと広く信じられている．

1.10　単位系

素粒子物理では，通常 $\hbar = 1$，$c = 1$ とする単位系を採用し，数式をこれらの定数を省いた簡単な形で提示する．電磁気学は $\varepsilon_0 = 1$ (電荷 q_1 と q_2 の間に働く力が単純に $q_1 q_2/4\pi r^2$ と表される)，$\mu_0 = 1$ と置いて $c^2 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1} = 1$ とする．しかし次元の確認や，実際の計算のために，例外的に $\hbar$ や c を明示することもある．以下の関係を覚えておくと便利である．

$$\hbar c \approx 197\ \text{MeV fm}, \qquad e^2/4\pi \approx 1.44\ \text{MeV fm}$$

$$\alpha = e^2/4\pi\hbar c \approx (1/137), \qquad c \approx 3 \times 10^{23}\ \text{fm s}^{-1}$$

エネルギー，質量，運動量といった諸量は，大抵 MeV や GeV の単位で提示される．我々もこの慣習に従うことにする．

第 **2** 章

Lorentz変換

標準模型に含まれる方程式は，どれもEinstein（アインシュタイン）の特殊相対性原理に整合していなければならない．この原理によると，自然法則は任意の慣性系から見て同じ形を持たなければならない．慣性系とは，その中の自由な物体が，加速せずに等速運動 (または静止) を続ける系である．地表に固定した座標系は，地球の重力場を外場として導入するのであれば，近似的に慣性系と見なすことができる．我々は本書の読者が回転変換，固有Lorentz（ローレンツ）変換，粒子の衝突現象の相対論力学に慣れ親しんでいることを仮定している．本章の大部分は記号に関する記述に充てられている．これらの記号は，ただ読みやすさのためのものではなく，適切な記号を用いることこそが，理論の記述において決定的に重要なのである．ことに標準模型のような相対論的な理論では，このような性格が顕著である．

2.1　回転・等速推進・固有Lorentz変換

ある事象 (event) を異なる慣性系 (inertial frame) から観測したときの，それぞれの時間と空間の座標値は，Lorentz変換によって関係づけられる．回転 (rotation) は，Lorentz変換の特別な場合と見ることができる．たとえば，ある座標系 K に対して z 軸のまわりに角度 θ だけ回転させた座標系 K' を考えてみよう．ある事象の時空座標が，座標系 K では $(t, \mathbf{r})$，座標系 K' では

$(t', \mathbf{r}')$ と観測されるものとすると，両者は次のような関係を持つ．

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Lorentz 変換は，一方が他方に対して一定の速度で動いている異なる座標系から，同じ事象を観測した場合の座標の関係も与える．たとえば慣性系 K' が，K に対して z 方向に一定速度 v で動いており，$t=0$ において K と K' の空間座標は一致しているものとしよう．ある事象が観測される時空座標が，座標系 K では $(t, \mathbf{r})$，座標系 K' では $(t', \mathbf{r}')$ であったとすると，変換式は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= \gamma(z - \beta ct)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

c は光速を表し，$\beta = v/c$，$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ である．

$x^0 = ct$，$x^1 = x$，$x^2 = y$，$x^3 = z$ と置くと，x^μ は次元が揃い，座標系 K における事象の時空座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ によって指定できる．本書におけるギリシャ文字の添字は，このように 0 から 3 までの整数値を取るものとして扱う．この便利な表記を用いると，Lorentz 変換 (2.2) を次のように書き直すことができる．

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= x^0\cosh\theta - x^3\sinh\theta \\
x'^1 &= x^1 \\
x'^2 &= x^2 \\
x'^3 &= -x^0\sinh\theta + x^3\cosh\theta
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ここで $\beta = v/c = \tanh\theta$ と置いた．同時に $\gamma = \cosh\theta$ である．

変換前の座標軸と平行を保ち，任意の方向に一定速度で移動する座標系へ

の変換を“等速推進(ブースト)”(boost) と称する．$x^0 = x'^0 = 0$ において原点が互いに一致するような慣性系同士 K と K' の間の一般の Lorentz変換は，回転と等速推進(ブースト)の組合せであって，このような変換は 6 個のパラメーターによって特定できる．3 個は K に対する K' の座標軸の向きを表し，残りの 3 個は K に対する K' の速度の成分を表す．このような一般の Lorentz変換を，

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.4}$$

と表すことができる．変換行列の要素 $L^\mu{}_\nu$ は無次元の実数である．これ以降，我々は“Einstein(アインシュタイン)の和の規約”を用いることにする．繰り返されたダミーの添字に関しては，自動的にその添字を一緒に変えて総和を取るものと決めておく．すなわち式 (2.4) の右辺では $\sum_{\nu=0}^3$ が省略されているものと見るのである．行列 $L^\mu{}_\nu$ は“固有Lorentz群”(proper Lorentz group. 問題2.6 および付録B 参照) と呼ばれる群を形成する．上付き添字と下付き添字の区別の重要性は，すぐ後で明らかになる．

x^μ における事象と $x^\mu + \Delta x^\mu$ における事象の間の“不変距離 (interval) の自乗”$(\Delta s)^2$ は, 次式によって定義される.

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \tag{2.5}$$

変換の前後で，2 つの事象の間の不変距離が変わらないことが，Lorentz変換の基本的な性質である．

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 \tag{2.6}$$

次のような“計量テンソル”(metric tensor),

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

を導入すると，$(\Delta s)^2$ を更に簡単に,

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{2.8}$$

と書き表すことができる．先ほど述べたように，繰り返されている添字につ

いては和をとる．上記の計量テンソルが対称テンソルであること ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) に注意されたい．任意の慣性系において，適用される計量テンソルは変わらない．

2.2 スカラーと反変・共変4元ベクトル

$(\Delta s)^2$ のように Lorentz変換の下で不変な量は，“スカラー”(scalar) と呼ばれる．我々は“反変4元ベクトル”(contravariant four-vector) a^μ を，Lorentz変換の下で x^μ と同様に，

$$a'^\mu = L^\mu{}_\nu a^\nu \tag{2.9}$$

のように変換するベクトルと定義する．反変4元ベクトルの例としては，たとえば粒子のエネルギー・運動量ベクトル $(E/c, \mathbf{p})$ がある．

反変ベクトルに対応する，添字が上付きでなく下付きの“共変4元ベクトル”(covariant four-vector) a_μ は，

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{2.10}$$

によって定義される．したがって $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ であれば，$a_\mu = (a^0, -\mathbf{a})$ である．

そこで，不変距離の自乗 $(\Delta s)^2$ は，次のようにも書ける．

$$(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\nu \Delta x^\nu$$

もっと一般的に，a^μ と b^μ が反変4元ベクトルであれば，これらの“スカラー積”(scalar product)，

$$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{2.11}$$

は Lorentz変換の下で不変である．

反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は，

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{2.12}$$

が成立するように定義される．$g^{\mu\nu}$ の要素は明らかに $g_{\mu\nu}$ のそれと一致する．

共変ベクトルの変換則,

$$a'_\mu = L_\mu{}^\nu a_\nu \tag{2.13}$$

は, 反変ベクトルの変換則から導かれる. 一般に $L_\mu{}^\nu$ と $L^\nu{}_\mu$ は等しくないことに注意されたい (問題2.1). スカラー積 (2.11) の不変性を用いると,

$$a'_\mu b'^\mu = L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\rho a_\nu b^\rho = a_\nu b^\nu$$

であり, また,

$$a'^\mu b'_\mu = L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\rho a^\nu b_\rho = a^\nu b_\nu$$

でもある. a^μ と b_μ は任意なので, 次の関係が得られる.

$$L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\rho = L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\rho = \delta^\rho_\nu \tag{2.14}$$

$$\delta^\rho_\nu = \delta^\nu_\rho = \begin{cases} 1, & \rho = \nu \\ 0, & \rho \neq \nu \end{cases}$$

2.3　相対論的な場

標準模型は “場 (field) の理論” である. 我々は時空内の各点 x でスカラー, ベクトルもしくはテンソル (本節の後の方で定義する) の変換則に従う “場” を扱う. x は (x^0, x^1, x^2, x^3) という座標一式を表す. たとえば電磁ポテンシャルは 4 元ベクトル場を形成しており, 電磁場はテンソル場であることを後から見る. スカラー場 $\phi(x)$ は, 変換前後の同じ時空点を x と x' で表すと, その定義により,

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.15}$$

のように変換する.

スカラー場からベクトル場を構築できる. 時空点 x と, その近傍の時空点 $x + \mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x$ は無限小量) における場の量の違いを $\mathrm{d}\phi$ とすると,

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu$$

であり, これは Lorentz 変換の前後で不変である. $\mathrm{d}x^\mu$ は任意の無限小反変

ベクトルなので，$\partial\phi/\partial x^\mu$ は共変ベクトルでなければならない (問題2.3)．下付き添字の使い方の慣例に従って，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi\right) = \partial_\mu\phi \tag{2.16}$$

と書く．ここから反変ベクトル，

$$\partial^\mu\phi = g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, -\nabla\phi\right) \tag{2.17}$$

も上記のように定義される．これらによると，

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2 \tag{2.18}$$

および，

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi \tag{2.19}$$

は，Lorentz 変換の下で不変である．

次に定義しなければならないのは，テンソル (tensor) という量である．$T^{\mu\nu}$，$T_{\mu\nu}$，$T^\mu{}_\nu$，$T^{\mu\nu}{}_\lambda$ などのテンソルは Lorentz 変換の下で，それぞれ $a^\mu a^\nu$，$a_\mu a_\nu$，$a^\mu a_\nu$，$a^\mu a^\nu a_\lambda$ などと同じように変換する量として定義される．たとえば次のような関係が成立する．

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\lambda T^{\rho\lambda}$$

繰り返された下付きもしくは上付きの添字に関する和を取る“縮約”(contraction) の結果，残された添字の変換性だけが残る．たとえば $T^\mu{}_\mu$ はスカラーであり，$T^{\mu\nu}{}_\mu$ は反変 4 元ベクトルである．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ も，このテンソルの定義に整合しており，変換行列要素 $L^\mu{}_\nu$ に関する次の条件を与える．

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\lambda}L^\rho{}_\mu L^\lambda{}_\nu \tag{2.20}$$

この条件 (2.20) は (2.14) と等価である．

スカラー，ベクトル，テンソルと同様に重要な量として“スピノル”(spinor) および“スピノル場”(spinor field) がある．これらにも Lorentz 変換の下で規定された変換則がある．スピノルの性質は付録B と第 5 章で議論する．

2.4 Levi-Civitaテンソル

Levi-Civita（レヴィ チヴィタ）テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ は，次のように定義される．

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} +1 & (\mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{ が } 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ の偶置換の場合}) \\ -1 & (\mu,\ \nu,\ \lambda,\ \rho \text{ が } 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ の奇置換の場合}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{2.21}$$

たとえば $\varepsilon_{1023} = -1$，$\varepsilon_{1203} = +1$，$\varepsilon_{0023} = 0$ である．

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ が，

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\mu\nu\lambda\rho} &= L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta L_\lambda{}^\gamma L_\rho{}^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\nu\delta} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu} \det(L) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu} \end{aligned}$$

を満たすことは，行列式の定義 (付録A) から直接に証明できるし，変換行列の行列式が 1 であることも証明される (問題2.4 および問題2.5).

3 次元における Levi-Civita の記号 ε_{ijk} も同じように定義される．この因子は体積を考える上で有用である．何故なら，

$$\varepsilon_{ijk} A^i B^j C^k = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

は，ベクトル $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ によって形成される平行六面体の体積である．同様に 4 次元の Levi-Civitaテンソルによって 4 次元体積 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\rho$ の構築が可能となる．添字の縮約の結果，Lorentzスカラーが残る．a，b，c，d が，それぞれ x^μ 軸に平行な無限小の要素，すなわち $a = (\mathrm{d}x^0, 0, 0, 0)$，$b = (0, \mathrm{d}x^1, 0, 0)$，$c = (0, 0, \mathrm{d}x^2, 0)$，$d = (0, 0, 0, \mathrm{d}x^3)$ であるならば，時空の“体積”要素，

$$\mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 = c\,\mathrm{d}^3 x\,\mathrm{d}t$$

は Lorentz不変なスカラーである (問題2.9 も参照).

2.5 時間反転と空間反転

時間反転，

$$x'^0 = -x^0,$$

$$x'^i = x^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

と，空間反転，

$$x'^0 = x^0$$
$$x'^i = -x^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

も $(\Delta s)^2$ を不変に保つが，これらの変換は固有Lorentz群から除かれている．しかしこれらの変換も関心の対象となるものであり，後の章で扱うことになる．

練習問題　(＊解法とヒント p.287)

*2.1 $L_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} L^\rho{}_\lambda g^{\lambda\nu}$ という関係を示し，$L_0{}^1 = -L^0{}_1$ を証明せよ．

*2.2 式 (2.14) を用いて，式 (2.9) と式 (2.13) の逆変換が，

$$a^\mu = a'^\nu L_\nu{}^\mu, \quad a_\mu = a'_\nu L^\nu{}_\mu$$

であり，

$$L_\nu{}^\mu L^\rho{}_\mu = \delta_\nu^\rho$$

となることを示せ．

*2.3 $\phi(x)$ がスカラー場であれば，$(\partial\phi/\partial x^\mu)$ が共変 4 元ベクトル場となることを示せ．

*2.4 問題2.1 の結果により $\det(L^\mu{}_\nu) = \det(L_\mu{}^\nu)$ を示し，式 (2.14) を用いて，

$$\det(L^\mu{}_\nu) = \pm 1$$

を証明せよ．

2.5 回転 (2.1) と等速推進(ブースト)(2.3) に関して $\det(L^\mu{}_\nu)$ が $+1$ となることを示せ．これは固有Lorentz変換が持つべき一般的な性質であり，この条件によって空間反転や時間反転 (2.5節) は除外される．空間反転や時間反転を表す変換の行列式は -1 となる．

*2.6 固有Lorentz変換を表す行列 $L^\mu{}_\nu$ は，群を形成することを示せ．

*2.7 δ^μ_ν がテンソルであることを示せ．

*2.8 自由空間における電磁波の振動数 ω と波数ベクトル $\mathbf{k}$ によって，反変 4 元ベクトル，

$$k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$$

が形成される．不変量として $k_\mu k^\mu = 0$ が得られるが，これは分散関係 $\omega^2 = c^2\mathbf{k}^2$ に対応している．振動数 ω で z 方向に進む波を，z 方向に速度 v で動い

ている座標系から観測すると，Doppler(ドップラー)シフトのために振動数が，

$$\omega' = \mathrm{e}^{-\theta}\omega = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,\omega$$

となることを示せ.

*2.9 Lorentz 変換の Jacobi(ヤコビ)行列式を考えて，4 次元体積要素 $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ が Lorentz 不変であることを示せ.

*2.10 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ は“擬テンソル”(pseudo-tensor) であること，すなわち空間反転操作の下で符号を変えることを示せ.

第3章

Lagrange形式

初等的な量子力学の教科書の索引を見ると, "ハミルトニアン"(Hamiltonian. 本書では式 (3.8)) という術語は確実に見つかるにしても, "ラグランジアン" (Lagrangian) は載っていない場合がある. しかし場の量子論を記述するには, ラグランジアンを用いる Lagrange(ラグランジュ)形式が最も便利である. 本章では, このLagrange形式を紹介する.

3.1 Hamiltonの原理

力学系 (散逸はないものとする) に関する古典力学は, "Hamilton(ハミルトン)の原理" に基づいて, 最もエレガントに導くことができる. 閉じた力学系は "ラグランジアン" と呼ばれる関数 $L(q, \dot{q})$ によって, その特徴を完全に記述できる. $q(t)$ は時間の関数である座標一式 $q_1(t)$, $q_2(t)$, …, $q_s(t)$ を表し, これらによって時刻 t における系の状態が規定される. 実例としては, たとえば q_i が, 相互作用をしている多粒子系の, それぞれの粒子の Descartes(デカルト)座標であってもよい. ここではすべての $q_i(t)$ が独立であると仮定する. 非相対論力学では $L = T - V$ と置くことになる. $T(q, \dot{q})$ は系の運動エネルギー, $V(q)$ は系のポテンシャルエネルギーである ($\dot{q} \equiv \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$).

ラグランジアン L が与えられると, "作用" (action) S が次のように定義される.

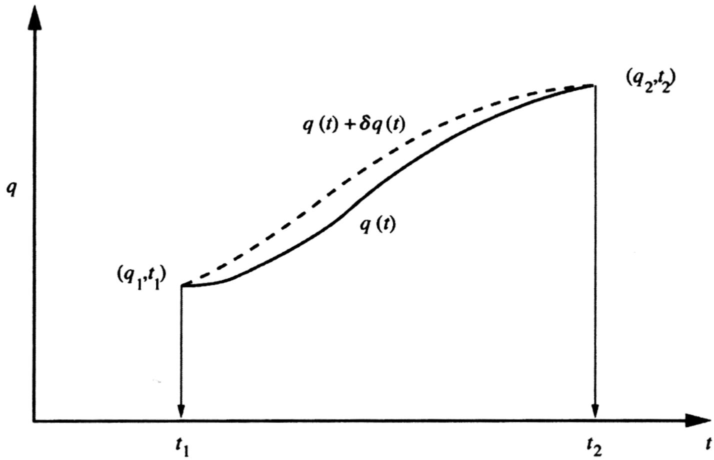


図3.1　運動方程式によって決まる $q(t)$ 空間内の径路 (実線) と，その近傍の仮想径路 (破線).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t \tag{3.1}$$

S の値は $q(t)$ 空間における積分径路の決め方に依存する．径路の両端，すなわち時刻 t_1 と時刻 t_2 における座標は固定されているものとするが，それ以外のところでは，まずは径路に対する制約を考えない．そうすると S は $q(t)$ の "汎関数" (functional) となる．Hamiltonの原理は，運動方程式によって与えられる $q(t)$ 空間内の現実の径路が，S を停留値にするような径路になっている，というものである．したがって現実の径路に対して，その近傍の任意の径路への変更を仮想した場合 (図3.1)，$\delta S = 0$ でなければならない．

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\delta \dot{q} = \mathrm{d}(\delta q)/\mathrm{d}t$ なので，積分の第2項を，部分積分によって書き直すことができる．

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t \tag{3.2}$$

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ なので，部分積分の際の径路の“両端”(始点と終点) からの寄与はゼロである．

変分 $\delta q_i(t)$ は任意なので，式 (3.2) において $\delta S = 0$ を要請すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.3}$$

という一連の方程式が得られる．これが“Euler-Lagrange(オイラー ラグランジュ)の運動方程式”である．この式は古典的な非相対論力学において，Newton(ニュートン)の運動方程式と等価である．単純な例として質量 m の粒子が，1 次元ポテンシャル $V(x)$ の中を運動しているものとすると $L = T - V = (m\dot{x}^2/2) - V(x)$ である．式 (3.3) より，即座に $m\ddot{x} = -\partial V/\partial x$ が得られるが，これはこの粒子に関する Newton の運動方程式に他ならない．

時間に依存する外場が存在する場合も，時間に依存するポテンシャルの形で Lagrange 形式に含めることができる．上記の 1 次元系の例では，$V(x)$ を $V(x,t)$ に置き換えればよい．ラグランジアン L が時間にあらわに依存するように変更を加えても，運動方程式の導出に影響はない．

与えられた系を表現するラグランジアンは一意的では“ない”という点に注意しよう．q と t の任意の関数 $f(q,t)$ を想定して，L に $\mathrm{d}f(q,t)/\mathrm{d}t$ を加えてもよい．このような項は S に $\left[f(q_2,t_2) - f(q_1,t_1)\right]$ という寄与をもたらすが，これは径路の選び方には依存しないので，得られる運動方程式は不変である．

3.2 エネルギーの保存

多粒子を含む閉じた系において，粒子間の相互作用だけが働く場合，系のラグランジアンは，あらわには時刻 t に依存しない．閉じた系の物理は，時間の原点の選び方に依らないからである．Archimedes(アルキメデス) の時代の物理法則も，Newton の時代の物理法則も，我々の物理法則と同じであることに疑いをはさむ理由はない．したがって閉じた系に関して，t にあらわに依存しないラグランジアン $L(q,\dot{q})$ を構築できなければならない．このようなラグランジアンの時間微分は，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right]$$

と表される．$q_i(t)$ が運動方程式に従うものとして，式 (3.3) に基づいて $\partial L/\partial q_i$ を書き換えると，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right] = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right)$$

すなわち，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right] = 0 \tag{3.4}$$

を得る．したがって，

$$E = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right] \tag{3.5}$$

という量は時間の経過の下で定数であり続ける性質を持ち，系の“エネルギー”と呼ばれる．この結果は Noether（ネーター）の定理 (1.2節) のひとつの実例にあたる．エネルギー保存則は，ラグランジアンが時間推進操作の下で対称であることの帰結として現れている．

非相対論的な多粒子の閉じた系において，ポテンシャル関数が $V(q_i)$ と表される場合，$\partial L/\partial \dot{q}_i = \partial T/\partial \dot{q}_i$ である．運動エネルギー T は $\dot{q}_i$ の 2 次の斉次関数なので (問題3.1)，$(\partial T/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i = 2T$ である．したがって，

$$E = 2T - (T - V) = T + V$$

となり，初等力学の結果が再現される．

“一般化運動量”(generalised momentum) p_i は，次のように定義される．

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.6}$$

系の“ハミルトニアン”は，次式で定義される．

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{3.7}$$

閉じた系のエネルギーの式 (3.5) を p と q を用いて書くと，

$$H(p, q) = E \tag{3.8}$$

となる．時間に関する均一性の帰結として得られるこの式は，古典力学から量子力学へ進む際の礎石となるものである．

3.3 連続系

Hamiltonの原理が，どのように連続系へと拡張されるかを見るために，単位長さあたり ρ の質量を持つ弦 (string) の振動を考えてみよう．$x = 0$ と $x = l$ の 2 点間に弦が張られ，張力 F を持ち，弦の各部は弦の両端を含む面内で横方向 (弦に垂直な方向) の小さな変位が許容されているものとする．重力は無視する．位置 x における弦の要素 $\mathrm{d}x$ が，時刻 t において平衡位置から横方向に $\phi(x,t)$ の変位を持つとすると，弦の長さは，

$$\int_0^l \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\phi^2\right)^{1/2} = \int_0^l \left[1 + (\partial\phi/\partial x)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}x$$

と表される．変位が小さく $\partial\phi/\partial x$ も小さいと仮定すると，弦の伸びは最低次までで $\int_0^l \frac{1}{2}(\partial\phi/\partial x)^2 \mathrm{d}x$ であり，張力 F によるポテンシャルエネルギーは $\int_0^l \frac{1}{2}F(\partial\phi/\partial x)^2 \mathrm{d}x$ である．また弦の運動エネルギーは $\int_0^l \frac{1}{2}\rho(\partial\phi/\partial t)^2 \mathrm{d}x$ である．ラグランジアンは，

$$L = T - V = \int_0^l \mathcal{L}\, \mathrm{d}x \tag{3.9}$$

と書けるが，ここで現れる，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \tag{3.10}$$

という量は，“ラグランジアン密度” (Lagrangian density) と呼ばれる．

作用は，

$$S = \int_0^l \mathrm{d}x \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi')$$

と表される．$\partial\phi/\partial t = \dot{\phi}$，$\partial\phi/\partial x = \phi'$ と書いた．

作用はHamiltonの原理によれば，実際の弦の運動を表す曲面 (この曲面は初期状態の変位 $\phi(x, t_1)$ と終状態の変位 $\phi(x, t_2)$ を繋ぐ) において停留値を与えるはずである (図3.2)．作用の変分は次式で与えられる．

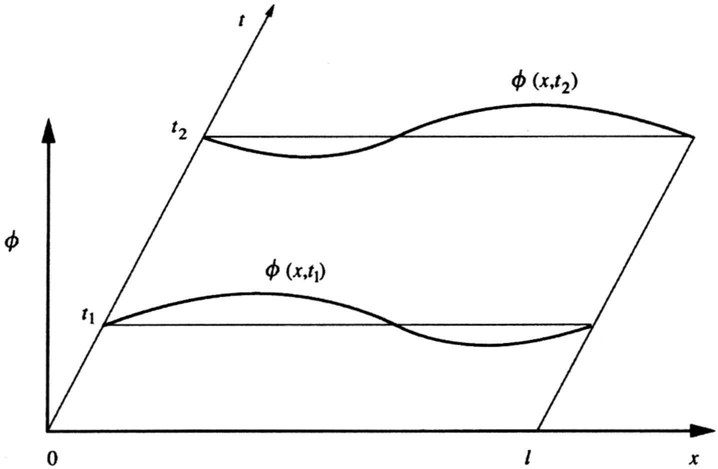


図3.2　初期状態の弦の変位 $\phi(x,t_1)$ と終状態の弦の変位 $\phi(x,t_2)$ の間を結ぶ，実際の弦の運動を表す時空の中の曲面．

$$\delta S = \int_0^l \mathrm{d}x \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta(\dot{\phi}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \delta(\phi') \right]$$

$\delta(\dot{\phi}) = \partial(\delta\phi)/\partial t$ と $\delta(\phi') = \partial(\delta\phi)/\mathrm{d}x$ を用いて，部分積分で各項を計算できる．

$$\delta\phi(x,t_1) = \delta\phi(x,t_2) = 0 \qquad (\text{for all } x)$$
$$\delta\phi(0,t) = \delta\phi(l,t) = 0 \qquad (\text{for all } t)$$

であり，ここでも境界からの寄与はゼロである．この結果，

$$\delta S = -\int_0^l \mathrm{d}x \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}\right) \right] \delta\phi \tag{3.11}$$

となる．$\delta\phi(x,t)$ は任意なので，$\delta S = 0$ の要請から次の方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'}\right) = 0 \tag{3.12}$$

ラグランジアン密度 (3.10) を上式に代入すると，振幅の小さな弦の波を表す，お馴染みの波動方程式になる．

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - F \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

このように連続系でも，適切なラグランジアン密度を選ぶことによって，Lagrange形式による記述が可能となる．この方法を任意の多次元空間内の波へと拡張できることも明らかであろう．式 (3.6) と式 (3.7) からの類推により，運動量密度を，

$$\Pi(\dot{\phi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

ハミルトニアン密度を，

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{3.13}$$

と定義できる．ラグランジアン密度 (3.10) があらわに t に依存しないことにより，

$$E = \int \mathcal{H} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right) \mathrm{d}x \tag{3.14}$$

は時間が経過しても値を変えない (問題3.2)．これは式 (3.5) と同様のことである．

3.4 Lorentz共変な場の理論

3 次元空間の下では，作用は次の形をとる．

$$S = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{3.15}$$

“体積要素” $\mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}^4 x$ は Lorentz不変な量である (2.4節)．したがって，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ がスカラー場のように変換するならば，S は Lorentz不変な量となる．そうすると場の方程式の共変性が保障される．理論が必要とする他の対称性も $\mathcal{L}$ に仕組まれることになる．

Lorentz不変なラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{3.16}$$

を考えよう．$\phi(x) = \phi(x^0, \mathbf{x})$ はスカラー場である．時空内の任意の点 x において，このような形のラグランジアン密度は，この点における場の値と，そこでの 1 次微分だけに依存する．このような場の理論は，“局所的” (local)

な理論と呼ばれ，“遠隔作用”を含まない．これは標準模型が持つ重要な特徴である．場の方程式は $\delta S = 0$ の条件と，遠方において場がゼロになるという条件の下で容易に導出できる．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \tag{3.17}$$

3.5 Klein-Gordon方程式

式 (3.16) の例として，Lorentz不変な次のラグランジアン密度を考えよう[§]．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2\right] = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right] \tag{3.18}$$

$\phi(x)$ は実スカラー場である．場の方程式 (3.17) は，

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi = 0$$

もしくは，

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2\right)\phi = 0 \tag{3.19}$$

となる．この式は“Klein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式”として知られている．

この方程式において，次のような波動的な解が考えられる．

$$\phi(\mathbf{r}, t) = a\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathbf{k} t + \theta_\mathbf{k})$$

振動数 $\omega_\mathbf{k}$ と波数ベクトル $\mathbf{k}$ は，

$$\omega_\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \tag{3.20}$$

という分散関係を持つ．$\theta_\mathbf{k}$ は任意の位相角である．

数学的な簡便性のために，解 $\phi(\mathbf{r}, t)$ は辺の長さ l，体積 $V = l^3$ の大きな立方体内に定義され，周期境界条件の下で，許容される波数ベクトルが $\mathbf{k} = (2\pi n_1/l, 2\pi n_2/l, 2\pi n_3/l)$ のように決まっているものとする．n_1，n_2，

---

§ (訳註) 次元を気にするなら，通常は $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - \mu^2\phi^2]$，$\mu \equiv mc/\hbar$ とする．μ は長さの逆数の次元を持つ．

n_3 は任意の整数値 $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ をとる.

式 (3.19) の一般解は，このような平面波の重ね合わせによって与えられる.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \frac{a_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right) \tag{3.21}$$

因子 $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ は後の都合のために導入した‡. 位相因子は複素振幅 $a_{\mathbf{k}}$ に吸収されている. 和は許容されている全ての $\mathbf{k}$ の値に関して行う.

de Broglie（ドゥ ブロイ）の関係式 $E = \omega$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ を考慮すると ($\hbar = 1$, $c = 1$ を思い出すこと), $\omega_{\mathbf{k}}$ の分散関係 (3.20) は自由粒子に関するEinstein（アインシュタイン）方程式,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

と等価である.

Klein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式は, 質量 m を持つスカラー粒子を記述するものと推測し得る. 1 成分のスカラー場に付随するベクトルは存在せず, そのような粒子自身に付随する固有角運動量はゼロである.

我々は, 式 (3.18) の形のラグランジアン密度が, 標準模型においてHiggs（ヒッグズ）ボゾンの記述のために必要になることを後から見る予定である. 基本粒子の水準から離れると, 電荷を持たない複合粒子である π^0 中間子（メソン）も, 同じようなラグランジアン密度で記述される.

---

‡ (訳註) ϕ と共役な正準運動量は $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial\phi/\partial t) = (1/c^2)(\partial\phi/\partial t)$ のように時間微分になるので, 量子化の際 (第 8 章) に交換子条件 $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ と $[\phi(\mathbf{x}t), \pi(\mathbf{x}'t)] = \mathrm{i}\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ を同時に成立させるためには, π の Fourier 展開の各項に時間微分によって生じている $\omega_{\mathbf{k}}$ が, $[\phi(\mathbf{x}t), \pi(\mathbf{x}'t)]$ の計算において結果的に打ち消されるように, このような因子 (c, $\hbar$ を明示するなら $c\sqrt{\hbar/2\omega_{\mathbf{k}}}$) を入れておかなければならない. 但し $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ($\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) のように生成消滅演算子の交換子をエネルギーに比例させてしまう全く別の流儀もあるので, 他の文献を見る際には注意が必要である.

原書では式 (3.21) の指数関数部分にある $\omega_{\mathbf{k}}$ が単に ω と表記されている (後出の式 (3.35), (4.15) なども同様である). 一般に $\omega_{\mathbf{k}}$ の添字 $\mathbf{k}$ が, このように断りなく省略されることは少なくない. 式中に $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$ や $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)$ のような因子を見たら, ω や E は独立変数ではなく, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ のように分散関係と符号が規定されている可能性を疑ってみたほうがよい. 但し Green 関数の引数として用いられる ω と $\mathbf{k}$, E と $\mathbf{p}$ などは互いに独立変数として扱われることになっており, 一筋縄にはいかない.

3.6 エネルギー・運動量テンソル

エネルギー保存と運動量保存を表す方程式は，一様な無限小の時空推進，

$$x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu \tag{3.22}$$

の下での $\mathcal{L}$ の変化を考えることによって得られる．δa^μ は x に依存しないものとする．これに対応する ϕ の変化は，次のように与えられる．

$$\delta\phi = (\partial_\nu \phi)\delta a^\nu \tag{3.23}$$

$\mathcal{L}$ は x^μ には直接に依存しないので，$\mathcal{L}$ の変分は，

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

と表される．場の方程式 (3.17) を用いて $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ を消去し，$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ を用いると，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right]$$

のように書き換えられ，式 (3.23) によって，

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right]\delta a^\nu$$

となる．また，

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\mu = \delta^\mu_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\nu$$

でもある．式 (2.14) の所で示したように，

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

である．δa^ν は任意なので，上記の $\delta\mathcal{L}$ の表式の比較から，

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right] = 0 \tag{3.24}$$

もしくは，

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad T^\mu_\nu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right] \tag{3.25}$$

という式が得られる.

T^{μ}_{ν} は"エネルギー・運動量テンソル"である. この中で,

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}$$

という成分は, 式 (3.13) で定義されているハミルトニアン密度に対応しており, 場のエネルギー密度と解釈される. 相対論的な理論では, エネルギー密度がテンソルの成分のように変換されるのである. 式 (3.25) の $\nu = 0$ 成分は, 次のように書ける.

$$\frac{\partial}{\partial t}(T^0_0) + \nabla\cdot\mathbf{T}_0 = 0 \tag{3.26}$$

$\mathbf{T}_0 = (T^1_0, T^2_0, T^3_0)$ はエネルギーの流束 (flux) と解釈され, 上式は局所的なエネルギー保存を表す. 式 (3.26) を全空間にわたって積分し, 発散定理を適用しよう. 遠方において場が消失するものと仮定すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^0_0 \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0 \tag{3.27}$$

となる. この方程式は系全体のエネルギー保存を表す.

上記と同様に, 式 (3.24) の $\nu = 1, 2, 3$ の成分は, 局所的な運動量の保存に対応しており, 場の全運動量は,

$$P_i = \int T^0_i \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{3.28}$$

と与えられる. エネルギーの場合と同様に, 遠方において場が消失するものと仮定すると, 場の全運動量は保存する.

Klein-Gordon(クライン ゴルドン)のラグランジアン密度 (3.18) の場合には,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

であり, 場のエネルギー密度は,

$$T^0_0 = \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \tag{3.29}$$

となる. ϕ を場の Fourier 振幅 $a_{\mathbf{k}}$ と $a^*_{\mathbf{k}}$ を用いて書き直し, 全空間にわたって積分すると, 場の全エネルギーが次のように与えられる.

$$H = \int T^0_0 \mathrm{d}^3\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}} a^*_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \tag{3.30}$$

この式を導くために，平面波関数の直交性，

$$\frac{1}{V}\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を用いた．

同様に式 (3.28) より，場の全運動量は次のように与えられる．

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \tag{3.31}$$

3.7　複素スカラー場

Klein-Gordon方程式を満たす複素スカラー場 $\Phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ を考察することも，教育的な観点から有意義である．我々は7.6節において，Φ が電荷 q を担い，Φ^* が電荷 $-q$ を担うことを見る予定である．複素場 Φ に対するKlein-Gordon方程式は，次の (実数の) ラグランジアン密度から得られる．

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \tag{3.32}$$

今後しばしば有用となる，ある処方をここで適用しよう．場の方程式を得るために，Φ の実部と虚部を独立に変化させる代わりに，Φ とその複素共役Φ^* を独立に変化させることにする．これらの作業は等価なものである．式 (3.32) を用いた作用において Φ^* の変化に関する停留性を考えると，容易に次式が得られる．

$$-\partial_\mu \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi = 0 \tag{3.33}$$

(Φ を変化させると，上式の複素共役が得られる)．

ラグランジアン密度 (3.32) は，スカラー場 ϕ_1 と ϕ_2 からの寄与の和となっていることに注意しよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \\ &= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2\right] + \frac{1}{2}\left[\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2\right]\end{aligned} \tag{3.34}$$

式 (3.33) の一般解は，次のような平面波の重ね合わせで表すことができる．

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right) \tag{3.35}$$

$a_{\mathbf{k}}$ と $b_{\mathbf{k}}$ は，ここでは互いに独立な複素数である．場のエネルギーは，次のようになる．

$$H = \sum_{\mathbf{k}} (a^*_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + b^*_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}) \omega_{\mathbf{k}} \tag{3.36}$$

我々は後から，この式が正の荷電場と負の荷電場からの別々の寄与として解釈できることを見る予定である．(π^+ 中間子(メソン) と π^- 中間子(メソン) はそれぞれ複合粒子であるが，これら全体としての運動は複素スカラー場によって記述できる．)

練習問題 (＊解法とヒント p.288)

***3.1** 各粒子の位置が $q_i(t)$ と表される多粒子系の運動エネルギーは，$\dot{q}_i$ の 2 次の関数となることを示せ．

***3.2** 式 (3.14) で与えられる E に関して，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$ を証明せよ．

3.3 3.3節の弦に関して，ハミルトニアン密度が，

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$$

となることを示せ．n 番目の基準振動モード (normal mode of oscillation) は，振幅を A_n と置くと，

$$\phi_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$$

と与えられる．$k_n = n\pi/l$，$\omega_n = (F/\rho)^{1/2} k_n$ である．全エネルギーが $A_n^2 \omega_n^2 \rho l/4$ であり，ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの間で調和振動が生じることを示せ．

***3.4** 式 (3.21) のスカラー場のエネルギーと運動量が，それぞれ式 (3.30) および式 (3.31) のように与えられることを証明せよ．

***3.5** ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ の中を運動する質量 m の粒子の波動関数 $\psi(\mathbf{r},t)$ を記述する Schrödinger 方程式が，次のラグランジアン密度から得られることを示せ．

$$\mathcal{L} = -(1/2\mathrm{i})\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right) - (1/2m)\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - \psi^* V\psi$$

($\mathcal{L}$ は実数だが，Lorentz不変ではないことに注意せよ．)

第 **4** 章

古典電磁気学

Maxwell（マックスウェル）の電磁気学の理論は，Einstein（アインシュタイン）の重力理論とも比肩し得る，最も美しい古典場の理論である．本章では Maxwell 方程式の Lorentz 共変性を確認し，その方程式を Hamilton の原理から導く方法を示す．そしてゲージ変換という重要な概念を導入し，変換性と電荷保存との関係を論じる．さらに場の方程式から得られる解の諸性質を調べる．最後に質量を持つベクトル場を記述できるようにラグランジアンを一般化するが，このような場も後の章で必要となる．

4.1 Maxwell 方程式

通常の文献と同様に，電荷 q_1 と電荷 q_2 の間に働く力が $q_1 q_2/4\pi r^2$ と表され，光速が $c=1$ と表されるような単位系 (したがって $\mu_0=1$，$\varepsilon_0=1$) を用いる．Maxwell 方程式は次のように表記される．

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho \quad \text{(a)}, \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mathbf{J} \quad \text{(b)}\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \quad \text{(c)}, \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \quad \text{(d)}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$\mathbf{E}$ は電場，$\mathbf{B}$ は磁場，ρ は電荷密度，$\mathbf{J}$ は電流密度を表す．本章では ρ と $\mathbf{J}$ の運動を考えず，これらを任意に設定できる“外場”として扱う．非斉次な方

程式 (a) と (b) は，次の連続の方程式によって表される局所的な電荷保存の事実と整合している．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$$

この式はLorentz不変性が自明な次のような形にも書ける．

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{4.2}$$

ここで用いる電荷・電流密度のベクトル，

$$J^\mu=(\rho,\mathbf{J}) \tag{4.3}$$

は反変4元ベクトル場であるものと仮定する．

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を導入すると，式 (4.1) の2本の斉次式 (c) と (d) は，

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{4.4}$$

によって自動的に満たされる．ここでは4元ポテンシャル，

$$A^\mu=(\phi,\mathbf{A}) \tag{4.5}$$

が反変4元ベクトル場であることを仮定する．

Maxwell方程式を，次のように定義される反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ を用いて書き直すこともできる．

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu=\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

電磁場がテンソル場を構成していることは明らかである．たとえば，

$$F^{01}=\partial A^1/\partial x_0-\partial A^0/\partial x_1=\partial A_x/\partial t+\partial\phi/\partial x=-E_x$$

であり，電磁場の成分はLorentz変換の下で，テンソルの要素として変換する．

Maxwell方程式の2本の斉次式は，次の恒等式に相当する．

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu}+\partial^\nu F^{\lambda\mu}+\partial^\mu F^{\nu\lambda}\equiv 0 \tag{4.7}$$

λ, μ, ν は $0, 1, 2, 3$ のうちの任意の 3 つの数であって，読者は容易に上式を証明できる．残りの 2 本の非斉次式は，明らかに共変な次の形で表される．

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{4.8}$$

たとえば $F^{\mu\nu}$ において $\nu = 0$ の第 1 列を見て，$\partial_\mu = (\partial/\partial t, \nabla)$ であることに注意すると，

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho$$

となることが分かる．

4.2 電磁場のラグランジアン密度

Hamiltonの原理によって Maxwell方程式が導かれるようなラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を求めてみよう．$\mathcal{L}$ が Lorentz不変であれば，作用，

$$S = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{4.9}$$

も，d^4x が不変なので (2.5節および3.4節) Lorentz不変となる．そして $\delta S = 0$ の条件から導かれた場の方程式は，任意の慣性系において同じ形になる．

Maxwell方程式は 4 元ポテンシャル A^μ をあらわに含まないが，Hamilton の原理から場の方程式を導くためには，ポテンシャルを変更可能な基本場として導入しておかなければならない．3.3節に示した“弦”の例から，$\mathcal{L}$ は場の 1 次導関数の 2 次式になるべきものと考えられる．Lorentz不変な形を持つラグランジアン密度として，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \tag{4.10}$$

が見出される§．電荷電流密度 J_μ を固定しておいて，場 A_μ の変更を考えると，このラグランジアン密度から Maxwell方程式が導出されることを示してみよう．(以下の議論は，ごく簡略化したものに過ぎない．)

作用は，

$$S = \int \Big[-\frac{1}{4}g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}F^{\lambda\rho}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu\Big]\mathrm{d}^4x \tag{4.11}$$

§ (訳註) c を明示すると $\mathcal{L} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (1/c)J^\mu A_\mu$，$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$．

と書かれ，その変分は次のようになる．

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}F^{\lambda\rho}\delta F^{\mu\nu} - J^{\mu}\delta A_{\mu}\Big]\mathrm{d}^4x \\ &= \int\Big[-\frac{1}{2}F^{\lambda\rho}(\partial_{\lambda}\delta A_{\rho} - \partial_{\rho}\delta A_{\lambda}) - J^{\mu}\delta A_{\mu}\Big]\mathrm{d}^4x \\ &= \int\big[-F^{\lambda\rho}\partial_{\lambda}\delta A_{\rho} - J^{\mu}\delta A_{\mu}\big]\mathrm{d}^4x \qquad (F^{\lambda\rho} = -F^{\rho\lambda}\text{による})\end{aligned}$$

第 1 項に部分積分を施し，場に適当な条件を与えておいて境界項をゼロにすると，次式を得る．

$$\delta S = \int\big[\partial_{\lambda}F^{\lambda\rho} - J^{\rho}\big]\delta A_{\rho}\mathrm{d}^4x$$

任意の δA_{ρ} の下で $\delta S = 0$ を要請すると，非斉次 Maxwell 方程式 (4.8) が得られる．(斉次式 (4.7) は恒等式になっている．)

4.3 ゲージ変換

4 元ポテンシャル $A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A})$ は一意的に決まるものでは“ない”．ポテンシャルに次のような変換を施しても，同じ電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ が得られる．

$$A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi = \big(\phi + \partial\chi/\partial t,\ \mathbf{A} - \nabla\chi\big) \tag{4.12}$$

$\chi(x)$ は任意のスカラー場である．この変換に伴って $F^{\mu\nu}$ に加わる余分の項は，次のように恒等的にゼロになる．

$$\partial^{\mu}\partial^{\nu}\chi - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\chi \equiv 0$$

このような $A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi$ という形の変換を“ゲージ変換”(gauge transformation) と呼ぶ．

ゲージ変換に伴って，作用 (4.11) に加わる余分の項 ΔS は，

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\int J_{\mu}\partial^{\mu}\chi\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int(\partial^{\mu}J_{\mu})\chi\,\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

である．2 行目を得るためにここでも部分積分を施し，境界項がゼロになる

ことを仮定した．任意の χ に関して ΔS がゼロになるための唯一の条件は，

$$\partial^\mu J_\mu = \partial_\mu J^\mu = 0$$

すなわち電荷・電流に関する連続の式 (4.2) そのものである．作用がゲージ不変であるためには電荷保存が要請され，電荷保存によって作用のゲージ不変性が保証される．

4.4 Maxwell方程式の解

場の方程式 (4.8) をポテンシャルを用いて表すと，

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu \tag{4.13}$$

となる．この方程式の解が，充分な任意性を持つことを，再びここで強調しよう．等価な解は，ゲージ変換による違いを持ち得る．このため通常はゲージ固定条件 (gauge-fixing condition) を課すことになる．たとえば“放射ゲージ”(radiation gauge) では，全時空点において $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ という付帯条件を設定する (問題4.2)．この条件は Lorentz不変ではないという欠点を持つ (別の動いている慣性系では成立しない) けれども，電磁気理論のある重要な性質を見るために有用である．放射ゲージの下で，A^0 に関する方程式は，次のように与えられる．

$$(\partial_i \partial^i) A^0 = -\nabla^2 A^0 = J^0$$

(式 (4.13) において $\nu = 0$ と置き，放射ゲージの条件 $\partial_i A^i = 0$ によって $\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0$ となることに注意せよ.) この方程式は，次の解を持つ．

$$A^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}^3 \mathbf{r}'$$

つまり放射ゲージにおいては，電荷密度だけによって A^0 が完全に決まってしまう！ A^0 に波動的な解は生じない．ベクトル成分 A^i $(i = 1, 2, 3)$ は，次の非斉次波動方程式を満たす．

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla A^0 \tag{4.14}$$

電荷と電流は，場 $\mathbf{A}$ の源 (source) もしくは吸引先 (sink) として振舞う．

自由空間では $\mathbf{J}=0$，$\rho=0$，$A^0=0$ であり，波数ベクトル $\mathbf{k}$，振動数 $\omega_{\mathbf{k}}=|\mathbf{k}|$ の平面波解，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=a\boldsymbol{\varepsilon}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)$$

が基本解となり得る．$\boldsymbol{\varepsilon}$ は単位ベクトル，a は波の振幅である．ゲージ条件から $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=0$ でなければならない．したがって $\mathbf{k}$ を決めると，独立な状態として選べるのは，これに垂直な 2 方向の偏極 ($\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ と書く) を持つ 2 つの状態だけである．自由空間における一般解は，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1,2}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left[a_{\mathbf{k}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}+a^*_{\mathbf{k}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\right] \tag{4.15}$$

と表される．複素数 $a_{\mathbf{k}\alpha}$ は振幅と位相を表している．平面波は体積 V の空間内で規格化され，周期境界条件を課されている．後の便宜のために因子 $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ を入れておいた[§]．

放射ゲージにおいて明白となる重要な点は，ベクトルポテンシャル A^μ は 4 つの成分を持っているけれども，そのうちの 1 成分 A^0 は独立な運動をせず，さらにもうひとつの成分も，言うなればゲージから派生する人工物であって，ゲージを固定することによって消去される．したがって物理的に意味を持つ動的な場は“2 つだけ”である．

他のゲージで表される場も，放射ゲージにおける場とゲージ変換によって関係づけられる．物理的には内容は同じでも，数学的には違いがあり，ある種の目的のためには，相対論的に不変な“Lorentz ゲージ”を採用するほうが便利である．Lorentz ゲージの条件は，

$$\partial_\mu A^\mu=0 \tag{4.16}$$

であり，場の方程式は，次のようになる．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A^\mu=J^\mu \tag{4.17}$$

[§] (訳註) Klein-Gordon 場と同様の事情による．p.45 訳註参照．

4.5 空間反転

座標原点に関する空間反転変換 $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, $\nabla \to \nabla' = -\nabla$ を考察してみよう (図4.1). これは固有Lorentz変換群からは除かれている変換である. これは“パリティ変換”(*parity* transformation) とも呼ばれる. 変換後の座標系は左手型 (left-handed) になっている. 慣例に従い, この変換の前後で電荷密度は不変とみなす. すなわち, ある時刻において, 変換された座標系 $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ から見た電荷密度が $\rho^P(\mathbf{r}')$ であれば, $\rho^P(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})$ である. $\mathbf{r}$ における電荷の速度を $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ とすると, 電流密度は $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})$ で $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ のように変換するので, これは通常のベクトルであって $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$ となる. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の変換がベクトルのように $\mathbf{E}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$ で, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の変換が軸性べ

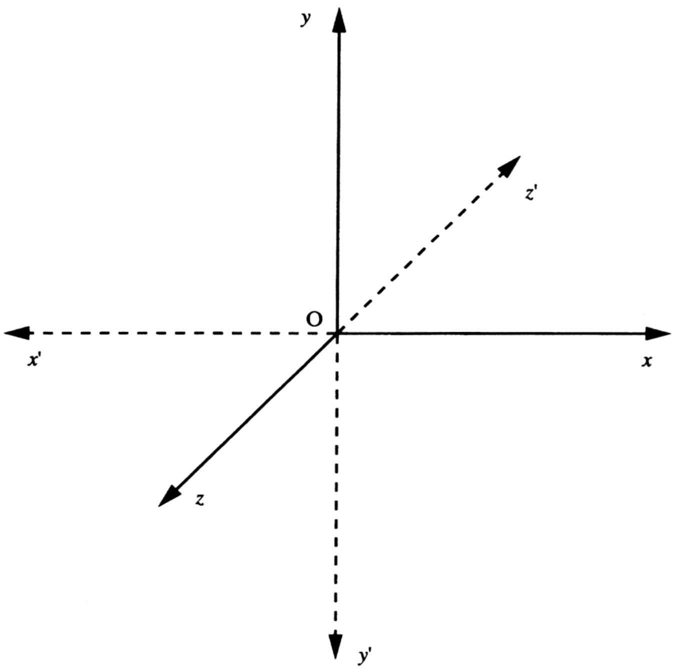


図4.1 通常の右手型の座標系 (実線) と, それを空間反転した座標系 (破線). 空間反転後の座標系は左手型になっている. (z 軸は紙面に垂直な方向.)

クトル (axial vector[‡]) のように $\mathbf{B}^P(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ となるならば，Maxwell方程式 (4.1) は反転後の座標系においても同じ形を持つ．

式 (4.4) により，ポテンシャルの変換は，

$$\phi^P(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^P(\mathbf{r}') = -\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{4.18}$$

のように扱わなければならない．

上記のようにすると，場の方程式は左手型の座標系においても，右手型の座標系における方程式と同じ形になる．ラグランジアン密度 (4.10) は空間反転の下で不変である．したがって採用する座標系の右手型／左手型の区別によらず，同じ電磁気学が適用できる．

4.6 荷電共役変換

物質と反物質を入れ替える変換の前後で，Maxwell方程式が同じ形で成立するかという問題にも関心が持たれる．この変換に伴って，電荷と電流密度は両方とも符号を変える．

$$\rho(\mathbf{r}) \to \rho^C(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) \to \mathbf{J}^C(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$$

次のように場の変換を定義すれば，Maxwell方程式は同じ形を保つ．

$$\phi^C(\mathbf{r}) = -\phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^C(\mathbf{r}) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{4.19}$$

この操作は“荷電共役(きょうやく)変換”(charge conjugation) と呼ばれている．Lorentz変換やパリティ変換と同様に，この荷電共役変換の下でもラグランジアン密度は不変である．

4.7 光子のスピン

ここで本格的な電磁場の量子化には立ち入らずに，式 (4.15) のような平面波で表される光子に付随する，量子化された固有角運動量 (intrinsic angular

‡ (訳註) 擬ベクトル (pseudovector) とも呼ぶ．

momentum)，すなわちスピン (spin) を論じることも可能である．

質量を持つ粒子のスピン $\mathbf{S}$ は，その粒子が静止している座標系から見た角運動量として定義される．そのような座標系では軌道角運動量が $\mathbf{L}=0$ であり，全角運動量が $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}=\mathbf{S}$ となるからである．しかし固有質量を持たない粒子は，どの慣性系から観測しても光速で運動しているので，上記のスピンの定義は適用できない．しかし，たとえば質量を持たない粒子が z 方向に運動しているならば，スピンの z 成分 S_z を決めることは可能である．軌道角運動量の z 成分は $L_z = xp_y - yp_x$ と表され，z 方向に運動している粒子に関しては $p_x = p_y = 0$ なので $L_z = 0$ であり，$J_z = S_z$ となるからである．

量子力学において，系の全角運動量演算子の z 成分 J_z は，次のように与えられる．

$$J_z = \mathrm{i}\hbar r_z = \mathrm{i}\hbar \lim_{\phi\to 0}\big[R_z(\phi)-1\big]/\phi \tag{4.20}$$

$R_z(\phi)$ は z 軸を回転軸として，系を角度 ϕ だけ正の方向に回転させる演算子である．

式 (4.15) において，波数が z 軸方向を向いた $\mathbf{k}=(0,0,k)$ の項を考えてみよう．

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}}\Big[(a_1\boldsymbol{\varepsilon}_x + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega_k t)} + [\text{複素共役}]\Big] \tag{4.21}$$

波の振幅 a_1 と a_2 は複素数であり，偏極ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ を，それぞれ x 方向および y 方向の単位ベクトルに設定した．$\mathbf{A}$ を z 軸のまわりに角度 ϕ だけ回転させると，各振幅の変更は，回転行列を用いた式で与えられる．

$$R_z(\phi)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\phi \to 0$ の極限では，

$$\lim_{\phi\to 0}\big[R_z(\phi)-1\big]/\phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，J_z は次のように表される．

$$J_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$J_z/\hbar$ の2つの固有ベクトルの一方は，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

で，固有値 $+1$ を持つ．もう一方は，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

で，固有値は -1 である．

したがって平面波の式 (4.21) で表される光子は“スピン1”と見なすことが可能で，運動方向に一致する向きと，その反対向きの2つの状態だけを，独立なスピン状態として持ち得る．光子の運動に垂直な方向のスピン成分に意味はない．これらの波は，古典的にはそれぞれ右円偏光，および左円偏光の状態に対応する (問題4.4)．

任意の偏光状態を持つ平面波は，右円偏光の波と，左円偏光の波の重ね合わせによって構築することができる．

4.8　電磁場のエネルギー密度

自由空間における電磁場のエネルギー密度の解析は，スカラー場に関する3.6節の解析の一般化にあたる．式 (3.25) は，

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}\partial_\nu A^\lambda - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{4.22}$$

と変更され，この式の下で，

$$T^0_0 = -F_{0\mu}F^{0\mu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.23}$$

となる (問題4.5)．物理的な場 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を用いて式 (4.23) を書き直すと，お馴染みの式になる．

$$[\text{エネルギー密度}] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \tag{4.24}$$

場を，式 (4.15) で導入した波の振幅 $a_{\mathbf{k}\alpha}$ によって表現することも可能であり，場の全エネルギーは次のように表される．

$$H=\int T^0_0\mathrm{d}^3\mathbf{x}=\sum_{\mathbf{k},\alpha}a^*_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{k}\alpha}\omega_{\mathbf{k}} \tag{4.25}$$

同様にして，場の全運動量は次のように書ける．

$$\mathbf{P}=\sum_{\mathbf{k},\alpha}a^*_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k} \tag{4.26}$$

4.9　質量を持つベクトル場

式 (4.10) に Lorentz 不変な項を付加した，次のラグランジアン密度を考えよう．

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu-J^\mu A_\mu \tag{4.27}$$

J^μ は外部電流密度である．場の方程式には次のように質量項が付け加わる．

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}+m^2A^\nu=J^\nu \tag{4.28}$$

ここで $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu}\equiv 0$ を考慮すると，式 (4.28) から，

$$m^2\partial_\nu A^\nu=\partial_\nu J^\nu \tag{4.29}$$

という式が得られる．この式は，式 (4.16) のような恣意的なゲージ固定条件ではなく，場の方程式の必然的な帰結であって，A^ν の成分がもともと独立ではないことを意味している．この式を用いると，場の方程式は次のように書き直される．

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu+m^2A^\nu=J^\nu+\partial^\nu(\partial_\mu J^\nu)/m^2 \tag{4.30}$$

したがって自由空間において，A^ν の各成分は次式を満たす．

$$\frac{\partial^2A^\nu}{\partial t^2}-\nabla^2A^\nu+m^2A^\nu=0 \tag{4.31}$$

この波動方程式は，自由粒子の Einstein(アインシュタイン) 方程式，

$$E^2=\mathbf{p}^2+m^2$$

と，量子化の規則 $E\to \mathrm{i}\partial/\partial t$，$\mathbf{p}\to -\mathrm{i}\nabla$ を通じて対応している．本節の修正したラグランジアンは，量子化すると，4 成分の場を伴う質量 m の粒子を

記述するものであり，そのうち 3 成分が独立であると結論できる．

式 (4.31) の平面波解を，次のように書く．

$$A^\nu = a\varepsilon^\nu \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_\mathbf{k} t)$$

ここでは $\omega_\mathbf{k} = k^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ である．条件 $\partial_\nu A^\nu = 0$ を満足するためには，

$$k_\nu \varepsilon^\nu = 0 \tag{4.32}$$

でなければならない．たとえば z 方向に進む $k^\mu = (k^0, 0, 0, k)$ の平面波を考えると，次のような反変 4 元ベクトルで表される 3 つの独立な偏極がある．

$$\varepsilon_1 = (0, 1, 0, 0)$$
$$\varepsilon_2 = (0, 0, 1, 0)$$
$$\varepsilon_3 = (k, 0, 0, k^0)/m$$

粒子のスピンは，その粒子が静止している座標系から見た粒子の角運動量である (4.5 節)．そのような座標系では $\mathbf{k} = 0$ で，$\varepsilon_1 = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_x)$，$\varepsilon_2 = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_y)$，$\varepsilon_3 = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_z)$ と置ける．4.7 節と同様に，偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}_x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_y$ は $J_z = \pm 1$ に対応しているが，ここでは更に偏極状態 $\boldsymbol{\varepsilon}_z$ がある．演算子 r_z を $\boldsymbol{\varepsilon}_z$ に作用させると $r_z \boldsymbol{\varepsilon}_z = 0$ なので，この偏極は $J_z = 0$ に対応する．

上記のように修正したラグランジアンは，質量を持ち，スピン $\mathbf{S}$ が $S = 1$，$S_z = 1, 0, -1$ の粒子を記述する．このような粒子が標準模型において重要であることは，後の章において明確になる．

練習問題　(＊解法とヒント p.288)

*4.1 式 (4.10) のラグランジアン密度が，次のように書き直せることを示せ．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - J^\mu A_\mu$$

*4.2 あるゲージにおいて $\nabla\cdot\mathbf{A} = f(\mathbf{r}, t) \neq 0$ であると仮定せよ．ゲージ変換を施した新たなポテンシャル (4.12) が，放射ゲージの条件 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ を満たすようにするゲージ変換関数 $\chi(\mathbf{r}, t)$ を見出せ．

*4.3 $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ のように定義されるテンソル場は，$F^{\mu\nu}$ と同じ形を持つ

が，電場と磁場が入れ替わっていることを示せ．さらに，

$$\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

という関係を確認し，この量が Lorentz 変換の下でスカラーであるが，パリティ変換の下では擬スカラーであることを示せ．

*4.4 式 (4.21) において $a_1 = 1$，$a_2 = \mathrm{i}$ とおいた波の電場が，

$$(E_x, E_y, E_z) = -\sqrt{\frac{2\omega}{V}}\big(\sin(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t), 0\big)$$

となることを示せ‡．z を固定して時間の関数として見ると，$\mathbf{E}$ が z 軸に関して正の方向に回転することを示せ．これが右円偏光の定義である．

*4.5 式 (4.22) から，

$$T^0_0 = -F^{0\mu}\partial_0 A_\mu + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

となることを示せ．ここに $\partial_\mu(A_0F^{0\mu}) = \partial_i(A_0F^{0i})$ という項を加えても，全エネルギーは変更されないことを示せ．このようにして，式 (4.23) の T^0_0 の表式が得られる．

*4.6 質量 m，電荷 q の粒子が，時間に依存しない外部電磁場の中を運動しており，外部電磁場が 4 元ポテンシャル $(\phi, \mathbf{A})$ で記述されるものとする．次のラグランジアン，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}$$

から非相対論的運動方程式，

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

が得られることを示し，正準運動量は $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}$，ハミルトニアンは，

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$$

と与えられることを示せ．

*4.7 1 粒子の運動に関して，γL が Lorentz 不変であれば，作用 $S = \int L\mathrm{d}t$ も Lorentz 不変であることを示せ．次のラグランジアン，

$$L = -m/\gamma - qA^\mu(\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}t)$$

が上記の条件を満たすことを証明せよ．(これは問題 4.6 の相対論版にあたる．)

---

‡ (訳註) ω については p.45 脚注の後半を参照.

第 **5** 章

Dirac方程式とDirac場

標準模型は場の量子論に立脚している．我々は第 4 章で古典的な電磁場について論じた．電磁場の量子化は第 8 章で扱う予定である．本章では，単一電子の相対論的な波動関数を記述するためにDirac（ディラック）が創り上げた“Dirac方程式”を論じる．しかしながらDiracの波動関数も，後から電磁場と共に量子化されることになる．すなわちDirac方程式が，場の方程式と見なされるわけである．このように 1 粒子の波動関数を量子化して場の量子論へ移行することを“第二量子化”(second quantisation) と呼ぶ．Diracの波動関数は複素数の場である．Dirac場がLorentz変換の下でどのように変換するかを示し，さらにDirac方程式を導くようなLorentz不変なラグランジアンを見出すことにする．

量子化を行うと，電磁場 $A_\mu(x)$ や $F_{\mu\nu}(x)$ は空間座標と時間座標に依存する演算子になる．量子状態として記述された環境において，これらの演算子の期待値は，古典的な場となる．Dirac場 $\psi(x)$ も量子化されると，空間座標と時間座標に依存する演算子になる．しかしこれに対応する観測可能な古典場は存在しない．この違いはPauli（パウリ）の排他律がフェルミオンだけに働き，ボゾンには働かないという違いを反映している．本章と，続く 2 つの章では，Dirac場の演算子としての性質はほとんど出てこない．大部分の操作においてDirac場を単なる複素場として扱い，単一粒子に関するDirac波動関数と考えることにする．

5.1 Dirac方程式

DiracはSchrödinger（シュレーディンガー）方程式を，特殊相対論の要請を満たす式に修正しようと試みて，Dirac方程式を創り上げた．1電子の波動関数 ψ を記述するSchrödinger方程式は，次のように与えられる．

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

Diracは空間と時間の対称性を保証するために，自由な1電子のハミルトニアンが，次のような形を持つものと仮定した．

$$H_\mathrm{D} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m = -\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m \tag{5.1}$$

m は電子の質量，$\mathbf{p}$ は運動量，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ で，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および β は行列である．ψ は "列" であり，単一成分の波動関数を扱うSchrödinger方程式は，多成分関数 ψ を扱う次のようなDirac方程式に移行する．

$$(\mathrm{i}\partial/\partial t + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - \beta m)\psi = 0 \tag{5.2}$$

もし，この方程式が質量 m の自由電子を記述するならば，その解は3.5節で示したKlein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式も満たすはずである．Dirac方程式に左から演算子 $(\mathrm{i}\partial/\partial t - \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)$ を作用させると，次式が得られる．

$$\Big[-\partial^2/\partial t^2 + \sum_i \alpha_i^2 \partial_i\partial_i + \sum_{i<j}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\partial_i\partial_j + \mathrm{i}m\sum_i(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\partial_i - \beta^2 m^2\Big]\psi = 0$$

$\partial_i = \partial/\partial x^i$ である．次の条件の下で，上式はKlein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式に一致する．

$$\beta^2 = 1, \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1$$
$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0\ (i \neq j), \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0\ (i = 1, 2, 3) \tag{5.3}$$

ここで，これと似たような式を満たす 2×2 のPauliスピン行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ を想起する読者もあるだろう．Pauli行列は，

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

と置くのが慣例となっている．同時に 2×2 の単位行列を，

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書くと便利である (これは随時，省略される)．

しかしながら，ここで α_i $(i = 1, 2, 3)$ と β の 4 つの反交換行列を具体的に表示する必要がある．そのためには，もう一組の Pauli 行列を導入して，α_i と β を 4×4 行列で表示しなければならない．行列表示は一意的ではなく，Dirac 方程式の性質のいろいろな側面を明示する際に，適切な表示の選び方はそれぞれに異なる．我々は，いわゆる“カイラル表示”(chiral representation) を採用する．カイラル表示の行列を 2×2 要素による“ブロック形式”で書くと，

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

である．ここで，

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．4×4 の単位行列は次のように書かれる．

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

カイラル表示の 4 つの行列が条件 (5.3) を満たすことは容易に確認できる．(ブロック形式の行列計算については付録A を参照．)

α_i と β は 4×4 行列なので，Dirac 波動関数 ψ は 4 成分 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ の“列”である．Dirac 方程式は Schrödinger 方程式を相対論的に修正したものであり，この修正に伴って現れる注目すべき諸性質を後から詳しく見る．Dirac 方程式によって記述される粒子は，固有角運動量 $(\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ を備えており，粒子が電荷 q を担っているならば，磁気能率(モーメント) $(q\hbar/2m)\boldsymbol{\sigma}$ を持つ．反粒子と解釈される“負エネルギー”の解も存在する．

Hamilton の最小作用の原理の下で Dirac 方程式を導くラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger(\mathrm{i}\partial/\partial t + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - \beta m)\psi$$
$$= \psi_a^*(I_{ab}\mathrm{i}\partial/\partial t + \mathrm{i}\alpha_{ab}\cdot\nabla - \beta_{ab}m)\psi_b \tag{5.6}$$

である．後の式は行列要素を用いて表した．ψ_a^* は，4 成分の“行”すなわち ψ の Hermite（エルミート）共役量 $\psi^\dagger = \psi^{\mathrm{T}*}$ の要素にあたる．ψ_a の実部と虚部を独立に変更する代わりに，ψ_a とその複素共役量 ψ_a^* を独立な場として扱っても，形式的には等価である (3.7 節参照)．$\mathcal{L}$ は ψ_a^* の導関数には依存していないので，任意の変分 $\delta\psi_a^*$ に関して $S = \int\mathcal{L}\mathrm{d}^4x$ が停留値になる条件から，即座に Dirac 方程式が導かれる．

5.2　Lorentz 変換と Lorentz 不変性

行列 α^i と行列 β のカイラル表示 (5.5) は，Lorentz 変換における Dirac 場の変換を議論する際に特別に便利なものである．我々は Dirac 行列を 2×2 行列のブロックによって書いたが，これに対応させて 4 成分を持つ Dirac 場のほうも，2 成分場の組合せとして書くのが自然であろう．

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

ψ_{L} と ψ_{R} はそれぞれ，4 成分 Dirac 場の上の 2 成分と下の 2 成分である．

$$\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Dirac 方程式 (5.2) は，次のようになる．

$$\mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_0\psi_{\mathrm{L}} \\ \partial_0\psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\sigma^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_i\psi_{\mathrm{L}} \\ \partial_i\psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$
$$-m\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.9}$$

ブロック単位の計算を行うと，ψ_{L} と ψ_{R} に関する 2 本の式が得られる．

$$\mathrm{i}\sigma^0\partial_0\psi_{\mathrm{L}} - \mathrm{i}\sigma^i\partial_i\psi_{\mathrm{L}} - m\psi_{\mathrm{R}} = 0$$
$$\mathrm{i}\sigma^0\partial_0\psi_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\sigma^i\partial_i\psi_{\mathrm{R}} - m\psi_{\mathrm{L}} = 0 \tag{5.10}$$

次のように記号を定義しておくと，Lorentz不変な構造を表す際に便利である．

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$$

この記号を用いると，式(5.10)は次のように書ける．

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{L}} - m\psi_{\mathrm{R}} = 0 \\ &\mathrm{i}\sigma^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{R}} - m\psi_{\mathrm{L}} = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

ラグランジアン密度(5.6)を ψ_{L} と ψ_{R} を用いた表記にするために，式(5.9)に左側から $(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger, \psi_{\mathrm{R}}^\dagger)$ を掛けなければならない．要素として現れる2成分場のHermite（エルミート）共役量は $\psi_{\mathrm{L}}^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*)$，$\psi_{\mathrm{R}}^\dagger = (\psi_3^*, \psi_4^*)$ である．ブロック単位の行列計算によって次式が得られる．

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{R}} - m(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \psi_{\mathrm{L}}) \tag{5.12}$$

作用における変分 $\delta\psi_{\mathrm{L}}^*$ と $\delta\psi_{\mathrm{R}}^*$ を考えると，式(5.11)が得られる．

ラグランジアンが任意の慣性系から見て同じ形になることを示すために，慣性系 K' における場 $\psi'(x')$ を，慣性系 K における場 $\psi(x)$ に関係づけなければならない．x' と x は同じ時空点を表しており，固有Lorentz変換，

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5.13}$$

の関係を満たす．演算子 ∂_μ は共変ベクトルのように振舞う．

$$\partial'_\mu = L_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

この逆変換は，次のようになる(問題2.2参照)．

$$\partial_\mu = L^\nu{}_\mu \partial'_\nu \tag{5.14}$$

付録B (式(B.17)と式(B.18))に示すように，このLorentz変換に関して，次の性質を持つ 2×2 のユニモジュラ行列(unimodular matrix) $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を与えることができる．

$$\mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\nu \mathbf{M} = L^\nu{}_\mu \tilde{\sigma}^\mu \tag{5.15}$$

$$\mathbf{N}^\dagger \sigma^\nu \mathbf{N} = L^\nu{}_\mu \sigma^\mu \tag{5.16}$$

行列 $\mathbf{M}$ と行列 $\mathbf{N}$ は，式 (B.19) の関係を持つ．

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{N} = \mathbf{N}^\dagger\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{5.17}$$

慣性系 K' で，ラグランジアン密度 (5.12) は次のように書かれる．

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\nu\mathbf{M}\partial'_\nu\psi_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^\dagger\mathbf{N}^\dagger\sigma^\nu\mathbf{N}\partial'_\nu\psi_{\mathrm{R}} - m(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger\psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^\dagger\psi_{\mathrm{L}}) \tag{5.18}$$

最初の2つの項には，式 (5.14) を，式 (5.15) および式 (5.16) と共に用いた．

2成分場の変換を，

$$\psi'_{\mathrm{L}}(x') = \mathbf{M}\psi_{\mathrm{L}}(x) \tag{5.19}$$

$$\psi'_{\mathrm{R}}(x') = \mathbf{N}\psi_{\mathrm{R}}(x) \tag{5.20}$$

と定義することによって，ラグランジアン密度の形を，

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}'^\dagger\tilde{\sigma}^\nu\partial'_\nu\psi'_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}'^\dagger\sigma^\nu\partial'_\nu\psi'_{\mathrm{R}} - m(\psi_{\mathrm{L}}'^\dagger\psi'_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}'^\dagger\psi'_{\mathrm{L}})$$

のように不変に保つことができる．($\mathbf{M}^\dagger\mathbf{N} = \mathbf{I}$ なので $\psi_{\mathrm{L}}'^\dagger\psi'_{\mathrm{R}} = \psi_{\mathrm{L}}^\dagger\mathbf{M}^\dagger\mathbf{N}\psi_{\mathrm{R}} = \psi_{\mathrm{L}}^\dagger\psi_{\mathrm{R}}$ であることに注意せよ．同様に $\psi_{\mathrm{R}}'^\dagger\psi'_{\mathrm{L}} = \psi_{\mathrm{R}}^\dagger\psi_{\mathrm{L}}$ である．)

式 (5.19) と式 (5.20) の変換によって，ラグランジアンは任意の慣性系において同じ形になり，したがって場の方程式も同じ形になる．任意の Lorentz 変換に対して行列 $\mathbf{M}$ と行列 $\mathbf{N}$ を決める方法を，付録B に与えてある．

回転変換の一例として，

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

を考える．これは z 軸に関する角度 θ の回転を表しており，式 (2.1) と等価である．この変換に対応する $\mathbf{M}$ は，次のユニタリー行列である．

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

$\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger = 1$ なので，式 (5.17) より $\mathbf{N} = (\mathbf{M}^\dagger)^{-1} = \mathbf{M}$ である．読者には式 (5.15) と式 (5.16) が成立することを確認してもらいたい．任意の回転に関し

て $\mathbf{M}$ はユニタリー行列になる (そして $\mathbf{N}$ もこれに等しい).

次に，Lorentz 等速推進(ブースト)の一例として，

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

を考えよう．これは z 軸方向の速度 $v/c = \tanh\theta$ の等速推進(ブースト)で，式 (2.3) と等価である．この変換に対応する行列 $\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$ は，次のようになる．

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{M}^{\dagger})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \tag{5.24}$$

5.3 パリティ変換

ラグランジアン密度 (5.12) を空間反転の下で不変にすることも可能である．反転した座標系から見た空間座標にプライム ($'$) を付けて表すと，

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \quad \nabla' = -\nabla \tag{5.25}$$

である．よって，式 (5.10) の所の σ^{μ} と $\tilde{\sigma}^{\mu}$ の定義により，

$$\tilde{\sigma}^{\mu}\partial'_{\mu} = \sigma^{\mu}\partial_{\mu}, \quad \sigma^{\mu}\partial'_{\mu} = \tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} \tag{5.26}$$

が成り立つ．ラグランジアン密度 (5.12) は明らかに，次のように定義される変換 $\psi(\mathbf{r}) \to \psi^{P}(\mathbf{r}')$ の下で不変である．

$$\psi^{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}') = \psi_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}), \quad \psi^{P}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}') = \psi_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}) \tag{5.27}$$

実際には，これとは別に，たとえば任意の実数 α を用いた，

$$\psi^{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}), \quad \psi^{P}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\psi_{\mathrm{L}}(\mathbf{r})$$

という変換を施しても，ラグランジアン密度は同じ形を保つ．しかし空間反転の下で，式 (5.27) の変換を採用するのが慣例となっている．

5.4 スピノル

Lorentz変換の下で，式(5.19)および式(5.20)の規則に従って変換する2成分の複素量は，それぞれ“左手型スピノル”(left-handed spinor)および“右手型スピノル”(right-handed spinor)と呼ばれる．この理由から，あらかじめ添字Lと添字Rを付けておいた．4成分のDirac場は，しばしばDiracスピノルと呼ばれる．

左手型と右手型のスピノルには，これらを組み合わせることでLorentzスカラー，擬スカラー，4元ベクトル，軸性ベクトル(擬ベクトル)，および更に高階のテンソルなどの諸量を作れるという注目すべき性質がある．たとえば$(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}}+\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}})$はLorentz不変な実スカラーである．他方$\mathrm{i}(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}}-\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}})$は実の擬スカラーで，固有Lorentz変換の下で不変だが，空間反転で符号を変える．式(5.15)，(5.16)，(5.27)を用いると，$(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}+\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}})$は空間反転によって空間的成分が符号を変える4元ベクトルであり($\tilde{\sigma}^{i}=-\sigma^{i}$に注意)，$(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\psi_{\mathrm{L}}-\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\psi_{\mathrm{R}})$は，空間反転で空間的成分の符号が変わらない4元軸性ベクトルであることが分かる．

5.5 γ行列

Diracスピノルを左手型と右手型の成分に分割する扱い方は，特に，弱い相互作用の議論に適している．フェルミオン間の電磁相互作用を記述する場合には，次のように定義される4×4行列γ^{μ}を導入すると都合がよい．

$$\gamma^{0}=\beta,\quad \gamma^{i}=\beta\alpha_{i}\quad (i=1,2,3) \tag{5.28}$$

行列βと行列α^{i}の性質により，行列γ^{μ}は次の性質を持つ．

$$\begin{aligned}&(\gamma^{0})^{2}=\mathbf{I},\quad (\gamma^{i})^{2}=-\mathbf{I}\quad (i=1,2,3)\\&\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=0\quad (\mu\neq\nu)\end{aligned} \tag{5.29}$$

カイラル表示を採用すると，

$$\gamma^{0}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^{0}\\ \sigma^{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \gamma^{i}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^{i}\\ -\sigma^{i} & \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{5.30}$$

と表される．行列 γ^μ を用いて，ラグランジアン密度 (5.6) を，次のように書ける[§]．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{5.31}$$

$\bar{\psi}$ は，4 成分の "行" $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ を表している．Dirac方程式は対称な形になる．

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{5.32}$$

もうひとつの有用な行列は，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ である．カイラル表示で書くと，次のようになる．

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

行列 $\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma^5)$，$\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)$ は，それぞれ Diracスピノルの左手型の部分と右手型の部分を抽出する射影演算子 (projection operator) になる．

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I} + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

5.4節において2成分スピノルを用いて構築したLorentzスカラーとLorentzベクトルは，次のように簡単に書き直せることを即座に証明できる．

$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}\psi$	スカラー
$\mathrm{i}(\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \psi_{\mathrm{R}} - \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \psi_{\mathrm{L}}) = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^5\psi$	擬スカラー
$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	反変ベクトル
$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_{\mathrm{L}} - \psi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \psi_{\mathrm{L}} = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	反変軸性ベクトル (擬ベクトル)

これらの量は，すべて実数であることに注意されたい．

[§] (訳註) c と $\hbar$ を明示すると $\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}c\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi$ である．ψ は $1/\sqrt{(\text{体積})}$ の次元を持つので，量子化する前の Dirac場 ψ は Schrödinger場と同様に，確率振幅の場のように見ることもできる．7.1節参照.

5.6 ラグランジアン密度の実数化

式 (5.6) もしくは (5.12) で表されるラグランジアン密度が持つ潜在的な問題は，これが実数ではないことである．ψ を波動関数と見なすと，$\mathcal{L}$ は複素関数である．ψ を演算子と見なすと，$\mathcal{L}$ はHermite(エルミート)演算子ではない．この結果，エネルギー・運動量テンソルは複素量になる．実際にHamilton(ハミルトン)の原理を適用するためには，作用の変分 δS が実数でなければならない．式 (5.12) の質量項 $-m(\psi_{\rm L}^\dagger\psi_{\rm R}+\psi_{\rm R}^\dagger\psi_{\rm L})$ は実数であり，$\mathcal{L}$ の虚部は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{i}\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_{\rm L}+\mathrm{i}\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_{\rm R}-(\mathrm{i}\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_{\rm L}+\mathrm{i}\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_{\rm R})^\dagger\right]\\
&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{i}\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_{\rm L}+\mathrm{i}\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_{\rm R}+\mathrm{i}(\partial_\mu\psi_{\rm L}^\dagger)\tilde{\sigma}^\mu\psi_{\rm L}+\mathrm{i}(\partial_\mu\psi_{\rm R})^\dagger\sigma^\mu\psi_{\rm R}\right]
\end{aligned}
$$

(行列 σ^μ と $\tilde{\sigma}^\mu$ のHermite(エルミート)性を用いた．) 最後の式は，丁度，

$$
(1/2)\partial_\mu(\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\psi_{\rm L}+\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\psi_{\rm R})
$$

にあたる．これは径路の選び方とは無関係の，径路の固定端において一定の寄与を作用に与えるだけの微分項 (3.1節参照) の和なので，δS は実数である．したがって $\mathcal{L}$ の虚部は除いてしまい，次のラグランジアン密度を採用すればよい．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}=&\frac{1}{2}\Big[(\mathrm{i}\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_{\rm L}+\mathrm{i}\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_{\rm R})+[\text{Hermite共役}]\Big]\\
&-m(\psi_{\rm L}^\dagger\psi_{\rm R}+\psi_{\rm R}^\dagger\psi_{\rm L})
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

この問題の更に興味深い議論については，Olive (1997) を参照されたい．

練習問題 (＊解法とヒント p.289)

5.1 式 (5.22) の行列 $\mathbf{M}=\mathbf{N}$ を式 (5.15) と式 (5.16) に代入すると，回転行列 (5.21) が得られることを示せ．

5.2 式 (5.24) で与えられる行列 $\mathbf{M}$ と行列 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}$ を式 (5.15) と式 (5.16) に代入すると，Lorentz等速推進(ブースト)の式 (5.23) が得られることを示せ．

***5.3** $\psi_{\rm R}^\dagger\psi_{\rm L}$ と $\psi_{\rm L}^\dagger\psi_{\rm R}$ が，固有Lorentz変換の下で不変であることを示せ．
$\psi_{\rm R}^\dagger\sigma^\mu\psi_{\rm R}$ と $\psi_{\rm L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\psi_{\rm L}$ は，固有Lorentz変換の下で反変4元ベクトルであるこ

とを示せ.

$\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\tilde{\sigma}^{\nu}\psi_{\mathrm{L}}$ と $\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}\psi_{\mathrm{R}}$ は，固有Lorentz変換の下で反変テンソルであることを示せ.

*5.4 ラグランジアン密度の式 (5.6) と (5.31) が等価であることを示せ.

5.5 γ^5 が次の性質を持つことを示せ.

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad \gamma^{\mu}\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^{\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

*5.6 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^5\psi$ は擬スカラー場，$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi = -\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$ は軸性ベクトル場であることを示せ.

*5.7 $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$，$(\gamma^{\mathrm{i}})^{\dagger} = -\gamma^{\mathrm{i}}$ を示せ.

第 **6** 章

自由空間におけるDirac方程式の解

本章では Dirac 方程式の平面波解を見てみる．Dirac 粒子がスピン $\hbar/2$ を持つことを示し，Dirac 方程式からどのようにして反粒子の存在が予言されるのかを調べ，最後にニュートリノの注目すべき性質について論じる．ニュートリノの質量は確定していない[§]．ニュートリノがゼロでない質量を持つ場合に，標準模型にどのような修正を施してこれを説明するかという問題についても，いくつかの提案がなされている．しかし本書では，ニュートリノを質量を持たない粒子として扱うことにする．

6.1 静止している Dirac 粒子

第 5 章において，自由空間における Dirac 方程式が，2 成分スピノルを関係づける次の方程式と等価であることを見た．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} - m\psi_{\mathrm{R}} = 0 \\
&\mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} - m\psi_{\mathrm{L}} = 0
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

上記の方程式は，次の形の平面波解を持つ．

[§] (訳註) スーパー・カミオカンデ (岐阜県の神岡鉱山に設置されたニュートリノ観測施設) における大気ニュートリノ観測の結果の発表 (1998) 以降，ニュートリノに質量があることは確実視されるようになった．しかし直接に検証されたのは質量の世代間の差によって生じるニュートリノ振動の現象であって，各ニュートリノの質量の値が実験的に決定されたわけではない．

$$\psi_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \tag{6.2}$$

u_{L} と u_{R} は 2 成分スピノルである．Dirac 方程式の解は Klein-Gordon 方程式 (3.19) を満たすので，分散関係は次のように決まる．

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{6.3}$$

最初に $m \neq 0$ の場合を考察しよう．最も容易な手順としては，まず対象とする粒子が静止しているような慣性系 K' における解を見出して，そこから Lorentz 等速推進を介して速度 v で運動している粒子の解を得ればよい．慣性系 K' における量をプライム記号を付けて表記することに決めると，この系における運動量は $\mathbf{p}' = 0$ なので，式 (6.1) は，

$$\mathrm{i}\partial_0' \psi_{\mathrm{L}}' = m\psi_{\mathrm{R}}' \quad \mathrm{i}\partial_0' \psi_{\mathrm{R}}' = m\psi_{\mathrm{L}}'$$

式 (6.3) は，

$$E'^2 = m^2, \quad E' = \pm m \tag{6.4}$$

となる．正のエネルギー $E' = m$ を持つ解は，

$$\psi_{\mathrm{L}}' = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}, \quad \psi_{\mathrm{R}}' = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \tag{6.5}$$

と表される．ここで，

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は任意の 2 成分スピノルである．量子力学における標準的な規約を採用して，エネルギー固有状態の時間依存因子を $e^{-\mathrm{i}Et}$ と置いた．

粒子が静止している系では，正のエネルギーを持つ左手型スピノルと右手型スピノルが同じであり，したがって，この解は空間反転操作の下で不変である (5.3節参照)．このことを “ 正のパリティ ” を持つと称する．

6.2　Dirac粒子のスピン

質量を持つ粒子のスピン演算子 $\mathbf{S}$ は，その粒子が静止している系における角運動量演算子として定義される．$\mathbf{S}$ の z 方向成分は，次式で与えられる．

$$S_z = \mathrm{i}\hbar \lim_{\phi\to 0}\bigl[R_z(\phi) - 1\bigr]/\phi$$

$R_z(\phi)$ は，粒子の状態を z 軸のまわりに角度 ϕ だけ回転する演算子である (4.7節参照)．状態を ϕ 回転することは，座標軸を $-\phi$ 回転することと等価であり，この変換を $\psi_{\mathrm{L}} \to \mathbf{M}\psi_{\mathrm{L}}$，$\psi_{\mathrm{R}} \to \mathbf{N}\psi_{\mathrm{R}}$ と書ける．式 (5.22) より，

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\phi/2} \end{pmatrix}$$

であり，

$$S_z = \mathrm{i}\hbar \lim_{\phi\to 0} \frac{1}{\phi}\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\phi/2}-1 & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\phi/2}-1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

と表される．$u_1 = 1$，$u_2 = 0$ の状態では，

$$S_z\psi'_{\mathrm{L}} = (\hbar/2)\psi'_{\mathrm{L}}$$
$$S_z\psi'_{\mathrm{R}} = (\hbar/2)\psi'_{\mathrm{R}}$$

であり，Dirac波動関数に S_z を作用させると，

$$S_z\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{L}} \\ \psi'_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = (\hbar/2)\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{L}} \\ \psi'_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

である．同様に $u_1 = 0$，$u_2 = 1$ の状態では，次のようになる．

$$S_z\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{L}} \\ \psi'_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = -(\hbar/2)\begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{L}} \\ \psi'_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

このように，粒子が静止している系において，S_z の固有値が $\pm(\hbar/2)$ の 2 つの独立な状態がある．Dirac波動関数に対する演算子 S_z の作用を行列表示することもできる．

$$\Sigma_z = (\hbar/2)\begin{pmatrix} \sigma_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

一般には，$\mathbf{S}$ は次の行列に相当する．

$$\mathbf{\Sigma} = (\hbar/2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

また，Dirac波動関数はすべて，スピン演算子の自乗の固有状態である．

$$\mathbf{\Sigma}^2 = (3/4)\hbar^2\mathbf{I}$$

固有値は $(3/4)\hbar^2 = (1/2)\big((1/2)+1\big)\hbar^2$ と表される．角運動量量子数が j の状態の，角運動量の自乗 $\mathbf{J}^2$ に関する固有値が $j(j+1)\hbar^2$ であることを思い起こすと，Dirac粒子をスピン値 $\hbar/2$ を持つ粒子と見なすのが妥当であると分かる．

6.3 平面波とヘリシティ

次に座標系 K' から，粒子と K' が速度 v で動いている座標系 K への変換を行う．話を簡単にするために，これが z 方向に $\mathbf{v} = (0,0,v)$ $(v>0)$ の速度を持つものとし，$u_1 = 1$，$u_2 = 0$ の状態を考える．

K と K' の間の座標変換は式 (5.23) で与えられ，これに伴う2成分スピノルの変換は，式 (5.24) の行列を用いた変換 (5.19) および (5.20) に従う．

$$\psi_{\mathrm{L}} = \mathbf{M}^{-1}\psi'_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathbf{N}^{-1}\psi'_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

最後に $t' = t\cosh\theta - z\sinh\theta$ を代入すると $(m\cosh\theta = \gamma m = E$，$m\sinh\theta = \gamma mv = p$，$\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ なので$)$ 次式を得る．

$$\psi_{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

“ヘリシティ” (helicity) という物理量が，平面波状態の分類のために有用である．この演算子は次式で定義される．

$$[\text{ヘリシティ}] = \frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{6.11}$$

与えられた状態に関するこの演算子の期待値は，その状態における粒子の運動方向とスピンの方向の関係を与える．$\mathbf{p} = (0,0,p)$ $(p>0)$ ならばヘリシ

ティは $\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \Sigma_z$ である．したがって状態 (6.10) はヘリシティ演算子の固有状態であり，その固有値は $+1/2$ である[§]．この状態を Dirac スピノルとして書くと次のようになる．

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(pz-Et)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} \\ 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (p>0) \tag{6.12}$$

規格化因子 $1/\sqrt{2}$ を入れてあるが，これによって Lorentz スカラー $\bar{\psi}\psi$ に関する標準的な規格化条件が満たされる．

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L = 1$$

同様にして，$u_1 = 0$，$u_2 = 1$ と置くと，負のヘリシティ$(-1/2)$を持つ固有状態が得られる．

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(pz-Et)} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\theta/2} \\ 0 \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix} \quad (p>0) \tag{6.13}$$

正のエネルギーを持つすべての平面波は，上記の状態に回転を施すことによって得られる．ヘリシティはスカラー積によって定義されているので，ある状態を回転させてもヘリシティは変わらない．式 (6.12) と式 (6.13) を，波数ベクトル $\mathbf{p}$ の場合へ一般化すると，

$$\psi_+ = e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} u_+(\mathbf{p}), \quad u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2}|+\rangle \\ e^{\theta/2}|+\rangle \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

[§] (訳註) 観測者が粒子よりも速く等速推進している慣性系に移ると，同じ粒子のヘリシティが逆転して見える (左巻き状態の粒子を“追い越して，向こう側から”見ると右巻き状態に見える) ので，ヘリシティは固有 Lorentz 不変量ではない．これに対してカイラリティ(chirality：左手型／右手型の区別すなわち γ^5 の固有値．p.73 参照) は固有 Lorentz 変換の下で不変である．但し高エネルギーの状況下で粒子の速度が光速に近いと考えてよい場合には，ヘリシティの区別とカイラリティの区別は実質的によく似た概念になる (問題6.1 および 9.1 節参照)．このためカイラリティの区別を左巻き／右巻きと呼んでいる文献も多い．語源的にはヘリシティはギリシャ語に由来して螺旋 (らせん) の周回方向の区別を，カイラリティはラテン語に由来して左手／右手の区別を意味する．

および，

$$\psi_- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}u_-(\mathbf{p}), \quad u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2}|-\rangle \\ \mathrm{e}^{-\theta/2}|-\rangle \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

と表される．ここで用いられているPauliのスピン状態 $|\pm\rangle$ は，演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ の固有状態で，それぞれ固有値 ± 1 を持つ (問題6.6)．正のエネルギーを持つ一般の状態は，このような平面波の重ね合わせによって構築される．

6.4　負エネルギーの解

粒子が静止している慣性系 K' において，式(6.4)の負エネルギー $E' = -m$ の解も存在しており，次のように表される．

$$\psi'_{\mathrm{L}} = v\mathrm{e}^{imt'}, \quad \psi'_{\mathrm{R}} = -v\mathrm{e}^{imt'} \tag{6.16}$$

この場合，左手型スピノルと右手型スピノルは，2成分スピノル v に付く符号が異なる．したがって負エネルギーの解は，空間反転の下で符号を変える(5.3節参照)．このことを“負のパリティ”を持つと称する．

6.3節と同じようにLorentz等速推進（ブースト）によって，正のヘリシティおよび負のヘリシティを持つ解 ψ_+ および ψ_- が得られる．Diracスピノルとして書くと次のようになる．

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix}$$

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (p > 0) \tag{6.17}$$

これらの解は，次のように任意の波数を持つ解へと一般化できる．

$$\psi_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)} v_+(\mathbf{p}), \quad v_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2}|-\rangle \\ -\mathrm{e}^{-\theta/2}|-\rangle \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

$$\psi_- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)} v_-(\mathbf{p}), \quad v_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle \\ \mathrm{e}^{\theta/2}|+\rangle \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

ここでも $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は，式 (6.15) の後に定義してある $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ の固有状態である．負エネルギーの解では，Lorentz不変量 $\bar{\psi}\psi$ に負号が付く．

$$\bar{\psi}\psi = \psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}} = -1$$

Dirac方程式における負エネルギー解の存在は，最初は困惑をもたらすものであった．量子論において，粒子はある状態から別の状態へと遷移できる．したがって全ての Dirac状態は不安定で，必ずさらに低エネルギーの状態への遷移が起こるように思われた．この困難に対する Diracの解答は，あらかじめ負エネルギーの状態がほとんど全て粒子に占有されていると仮定すれば，負エネルギーの状態への遷移は Pauli の排他律によって禁じられる，というものである．負エネルギー状態の“海”の中に生じた単独の非占有状態，すなわち“空孔”(hole) は，正のエネルギーを持ち，質量は本来の粒子と同じであるが，運動量，スピンおよび電荷が反転した“反粒子”(antiparticle) として振舞うはずである．式 (6.17) で表される負エネルギー状態 ψ_+ から電子が欠落したならば，その空孔は正のエネルギー E，正の運動量 p，正のヘリシティを持つ反粒子を表すことになる．ヘリシティが正になるのは“空孔のスピン”も，本来の粒子が持つスピンと反対のスピンを持つからである．

ひとつの粒子が，負エネルギー状態の“海”の中のひとつの空の状態へと落ち込む過程は，粒子-反粒子対(つい)が同時に消滅する過程として観測され，その際に $\geq 2mc^2$ の電磁エネルギーの放出が伴う．逆に負エネルギー状態からひとつの粒子が正エネルギー状態へ励起される過程は，粒子-反粒子対の生成として観測されることになる．電子の反粒子にあたる“陽電子”(positron) については，1932年にその存在が実験的に確認され，そのすぐ後に電子-陽電子対の生成も観測された．

負エネルギー状態全体が一様に占有された無限の電荷を持つ“海”は，観測することができないものと仮定されている．したがって，結局 Dirac方程式において，たとえば電子を粒子，陽電子を反粒子と見なすのか，逆に陽電子を

粒子，電子を反粒子と見なすのかという扱い方は，全く任意に選べる．Dirac方程式が単一の電子を記述するという当初の仮定は，実はそのまま維持できるものではない．我々は不可避的に，場の量子として粒子と反粒子が現れる“場の量子論”へと移行しなければならなくなる．これは電磁場の量子として光子が現れる事情と似ている．この問題は，第8章で扱う予定である．

6.5 Dirac場のエネルギーと運動量

Dirac場のラグランジアン密度が式(5.31)に与えられているが，これを詳しく見てみることにしよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= \mathrm{i}\psi_a^*\partial_0\psi_a + \bar{\psi}_b(\mathrm{i}\gamma^i_{ba}\partial_i - m\delta_{ba})\psi_a \end{aligned} \tag{6.20}$$

5.1節のように，ψ_a と ψ_a^* が互いに独立であるように扱い，エネルギー・運動量テンソルを次のように置く．

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}\partial_\nu\psi_a - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu \tag{6.21}$$

($\mathcal{L}$ は $\partial_\mu\psi_a^*$ に依存しない．)

エネルギー密度は，

$$\begin{aligned}T^0_0 &= \mathrm{i}\psi_a^*\partial_0\psi_a - \mathcal{L} \\ &= \bar{\psi}(-\gamma^i\partial_i + m)\psi \end{aligned} \tag{6.22}$$

運動量密度は，

$$T^0_i = \mathrm{i}\psi_a^*\partial_i\psi_a = \mathrm{i}\psi^\dagger\partial_i\psi \tag{6.23}$$

と表される．

自由空間における Dirac方程式の一般解は，あらゆる可能な平面波の重ね合わせの形で，次のように表すことができる．

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p},\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{E_\mathbf{p}}}\left(b_{\mathbf{p}\varepsilon}u_\varepsilon(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-E_\mathbf{p}t)} + d^*_{\mathbf{p}\varepsilon}v_\varepsilon(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+E_\mathbf{p}t)}\right) \tag{6.24}$$

ε はヘリシティを表す ± の添字で，$b_{\mathbf{p}\varepsilon}$ と $d_{\mathbf{p}\varepsilon}$ は任意の複素数である．第3章

と第4章で，ボゾン場を表す際に用いた因子 $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ の代わりに，$\sqrt{(m/E_{\mathbf{p}})}$ が挿入されている§.

場の平面波展開を T^0_0 と T^0_i の式に代入して，全空間にわたる積分を実施すると，Dirac 場の全エネルギーと全運動量を，成分波の振幅によって表現することができる．

$$H = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon}(b^*_{\mathbf{p}\varepsilon}b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon}d^*_{\mathbf{p}\varepsilon})E_{\mathbf{p}} \tag{6.25}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon}(b^*_{\mathbf{p}\varepsilon}b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon}d^*_{\mathbf{p}\varepsilon})\mathbf{p} \tag{6.26}$$

上記の式の導出は (いささか退屈な作業であるが) 読者各位において試みてもらいたい．各平面波は Dirac 方程式 (5.32) の解なので，次式を満たす．

$$\begin{aligned}(\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \gamma^i p^i)u_\varepsilon(\mathbf{p}) &= m u_\varepsilon(\mathbf{p}) \\ (\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \gamma^i p^i)v_\varepsilon(\mathbf{p}) &= -m v_\varepsilon(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{6.27}$$

各種の直交関係も用いる必要があるが，これらは問題6.3 に取り上げてある．

6.6 $m = 0$ の場合：ニュートリノ

粒子の質量がゼロであれば，ψ_{L} と ψ_{R} は，場の方程式 (6.1) においても，これに対応するラグランジアン密度 (5.12) においても相互に結合しない．ψ_{L} は次式を満たす．

$$\mathrm{i}(\partial_0 - \sigma^k\partial_k)\psi_{\mathrm{L}} = 0 \tag{6.28}$$

---

§ (訳註) Dirac 場の成分 ψ_a の正準共役運動量は (自然単位系で) $\pi_a = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\psi_a) = \mathrm{i}\psi^*_a$ であり，ボゾン場の場合 (p.45 訳註) のような時間微分量にならないので，この挿入因子はボゾン場の $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ とは意味合いが異なる．これは $u(\mathbf{p})$ と $v(\mathbf{p})$ に課してある特殊な規格化条件 (問題6.3) から生じる因子を打ち消す役割を持つ．$\{b_{\mathbf{p}\varepsilon}, b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} = \{d_{\mathbf{p}\varepsilon}, d^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$ と $\{\psi_a(\mathbf{x}t), \pi_a(\mathbf{x}'t)\} = \mathrm{i}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ を同時に成立させるように，ここで挿入する因子と $u(\mathbf{p})$，$v(\mathbf{p})$ の規格化条件の間で辻褄を合わせておけばよい．上記の反交換子条件の下で挿入因子を $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ と置く流儀もある ($E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$)．

なお，生成消滅演算子に関して $\{b_{\mathbf{p}\varepsilon}, b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} = \{d_{\mathbf{p}\varepsilon}, d^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} \propto E_{\mathbf{p}}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$ のような別の交換子条件を採用する文献もあるという事情は，ボゾン場と同様である．

先ほど我々が解を見出すために用いた方法は，ここには適用できない．質量がゼロの粒子は，どの慣性系から見ても光速 c で運動しており，粒子が静止している系は存在しないからである．代わりに直接に平面波解を探すことにして，簡単に，

$$\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)}$$

と置いてみる．$p > 0$，$E = p$ である．これを式 (6.28) に代入すると，これは $u_1 = 0$ の場合に解になることが分かるので，

$$\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \tag{6.29}$$

と書く．これは負のヘリシティを持つ解である．同様に，右手型の式の解も，

$$\psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \tag{6.30}$$

と与えられる．$p > 0$，$E = p$ であり，これは正のヘリシティをもつ状態である．

また，負エネルギーの解は，

$$\psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)} \quad (p > 0) \tag{6.31}$$

と表される．“空孔”として見るならば，これは正のエネルギーと正の運動量 p を持つ．空孔の運動量とスピンは，その空になった負エネルギー状態の運動量およびスピンと反対向きになるので，ψ_{L} に対応する空孔は正のヘリシティを持ち，ψ_{R} に対応する空孔は負のヘリシティを持つ．

標準模型では，ニュートリノは質量をゼロと置いたDirac方程式によって記述される．後から見るように，自然は ψ_{L} しか使っておらず，ニュートリノは負のヘリシティだけを持つように見える．これに対応する反ニュートリノは正のヘリシティを持ち，明確に区別される．5.3節で見たように，空間反転の下で $\psi_{\mathrm{L}} \leftrightarrow \psi_{\mathrm{R}}$ の入れ替えが生じるので，もし ψ_{R} が反応しないならば，自然はパリティ変換に関して対称ではないことになる．自由なニュートリノは，次のラグランジアン密度を通じて，標準模型に導入される．

$$\mathcal{L}_\nu = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{L}} \tag{6.32}$$

練習問題　(＊解法とヒント p.290)

*6.1 式 (6.14) に示した ψ_+ の規格化の下で,

$$\psi_+^\dagger \psi_+ = \cosh\theta = E/m$$

であることを示せ (通常の粒子の量子力学における規格化ではないことに注意せよ).

この正のヘリシティを持つ状態が右手型モードにある確率は,

$$\mathrm{e}^\theta/(2\cosh\theta) = (1 + v/c)/2$$

であり, 左手型モードにある確率は $(1 - v/c)/2$ であることを示せ. また ψ_- についてはどうなるか?

6.2 式 (6.18) の負エネルギー, 正のヘリシティを持つ状態が, 左手型モードである確率は $(1 + v/c)/2$ であることを示せ.

*6.3 以下の式を証明せよ.

$$u_\pm^\dagger(\mathbf{p})u_\pm(\mathbf{p}) = v_\pm^\dagger(\mathbf{p})v_\pm(\mathbf{p}) = E_{\mathbf{p}}/m$$
$$u_\pm^\dagger(\mathbf{p})u_\mp(\mathbf{p}) = v_\pm^\dagger(\mathbf{p})v_\mp(\mathbf{p}) = 0$$
$$u_\pm^\dagger(\mathbf{p})v_\pm(-\mathbf{p}) = v_\pm^\dagger(-\mathbf{p})u_\pm(\mathbf{p}) = 0$$
$$u_\pm^\dagger(\mathbf{p})v_\mp(-\mathbf{p}) = v_\mp^\dagger(-\mathbf{p})u_\pm(\mathbf{p}) = 0$$

これらの結果は, 問題6.4 を解くために有用である.

6.4 平面波展開の式 (6.24) とエネルギー・運動量テンソルの成分 (6.22) および (6.23) を用いて, 波 ψ によって運ばれるエネルギーと運動量が式 (6.25) および式 (6.26) によって与えられることを示せ.

*6.5 右手型の場の成分を捨てて $m \to 0$, $\theta \to \infty$ の極限を考え, 式 (6.24) に対応するニュートリノの平面波展開が, 次のような 2 成分の Pauli 型の形を取ることを示せ.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \left(b_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)} + d_{\mathbf{p}}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} \right) |-\rangle_{\mathbf{p}}$$

*6.6 極座標 θ および ϕ で決められた方向の運動量 $\mathbf{p}$ を考えよう.

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

このとき,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ \sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

であり，Pauli のスピン状態，

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

が式 (6.14) と式 (6.15) に現れるヘリシティの固有状態であることを示せ．全体に掛かる位相は不定である．

第 **7** 章

荷電粒子場の電磁力学

本章では，電荷を持つ Dirac 粒子や反粒子 (たとえば電子と陽電子) が，電磁場と相互作用したり，電磁場を通じて他の粒子や反粒子と相互作用をする系を扱うための，場の理論に必要なラグランジアンを構築する．他の文献を参照する際の便宜も考えて，記述を簡潔にするために，我々は 5.5 節で導入した 4 成分の Dirac スピノルと γ 行列を用いることにする．

7.1　確率密度と確率の流れ

前章までで，種々の保存則がラグランジアンの対称性と関係している例を見た．式 (5.31) に示したラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

は，次の変換の下で不変である．

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi(x) \tag{7.1}$$

α は x に対して定数である．この変換は群 $U(1)$ を形成する (付録B 参照). 全時空点にわたって位相の変換量が一定なので，このような変換を“大域的 (global) 変換”と呼ぶ．

仮にここで変換位相 α に，時間と空間に依存する任意の小さな変分を導入して $\alpha \to \alpha'(x) = \alpha + \delta\alpha(x)$ としても，場の方程式がそのまま成立するもの

と仮定すると，作用 S は実際の場の挙動の下で停留するはずなので，変換位相の変分に対応する作用の 1 次変分 δS がゼロでなければならない．作用の変分は，演算子 ∂_μ が $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\alpha(x)}$ に作用するところから生じるので，1 次までの変分を見ると，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \mathrm{i}\partial_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\alpha}\mathrm{d}^4x \\ &= \int \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu(\delta\alpha)\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

である．部分積分を施すと，

$$\delta S = -\int\left[\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\right]\delta\alpha\mathrm{d}^4x$$

となる．これが任意の $\delta\alpha(x)$ に対してゼロとなる唯一の条件は，

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{7.2}$$

である．時空の各点 x において，$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は反変 4 元ベクトルとして変換するので (5.5節)，次のように反変ベクトル場を定義できる．

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \big(P(x), \mathbf{j}(x)\big) \tag{7.3}$$

第 1 成分は $P(x) = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger(\gamma^0)^2\psi = \psi_a^*\psi_a = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2$ である．こうすると，式 (7.2) はお馴染みの形になる．

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{7.4}$$

$P(x)$ を波動関数 $\psi(x)$ に付随する粒子の確率密度と見なし，$\mathbf{j}(x)$ を確率密度の流れと見なすならば，式 (7.4) は局所的な粒子の存在確率の保存を表すことになる．場が無限遠方でゼロになるものと仮定して，全空間にわたる積分を施して発散定理を適用すると，次式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int P\mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$$

したがって，

$$\int P(t, \mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int \psi^\dagger\psi\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

という量は，時刻に依存しない定数である．$\psi(x)$ を規格化された 1 粒子の波

動関数と見なすならば，この定数は 1 であり，波動関数がある時点で規格化してあれば，規格化された状態が続くことが分かる．第 8 章では第二量子化を施した場の理論において，$\int P(t,\mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathbf{x}$ は粒子数から反粒子数を差し引いた数を表す演算子となることを見るが，この数は保存する．

式 (7.2) を場の方程式から導出することもできるが，ここで示したように，式 (7.1) の $U(1)$ 対称性から保存則を導く手法の方が，簡潔でエレガントである．

7.2 電磁場を伴う Dirac 方程式

古典力学では，電磁ポテンシャル $(\phi,\mathbf{A})$ によって与えられる外部電磁場の中を運動する電荷 q の 1 粒子ハミルトニアンは，自由粒子のハミルトニアンの式 (3.8) に対して，

$$E \to E - q\phi, \quad \mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}$$

という置き換えを施すことによって得られる．粒子のエネルギー・運動量 4 元ベクトル $p^\mu = (E,\mathbf{p})$ を用いて書くと，

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu \tag{7.5}$$

である (問題4.6 および問題4.7 参照)．式 (7.5) と量子化の規則 $p_\mu \to \mathrm{i}\partial_\mu$ によると，電磁場がある場合の Dirac 方程式は必然的に，

$$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi = 0 \tag{7.6}$$

という形になり，ラグランジアン密度にもこれに対応した変更が施される．

式 (4.10) と式 (5.31) を用いて，Dirac 場と電磁場 (外部の電荷・電流源 J^μ も含む) が共存する系のラグランジアン密度は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \bar{\psi}\left[\gamma^\mu \mathrm{i}\partial_\mu - m\right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu\end{aligned} \tag{7.7}$$

ラグランジアンは依然として，変換位相 α が定数の大域的変換 $\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi(x)$ の下で不変であって，前と同様に粒子の保存が導かれる．

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{7.8}$$

4.2節のように，作用において場 A_μ の変分を考えると，次の電荷・電流密度を含んだMaxwellの方程式が導かれる．

$$J^\mu + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu + qj^\mu \tag{7.9}$$

式 (7.8) と式 (7.9) において，$j^\mu(x)$ は保存する粒子数密度の流れであって (反粒子は負に数える)，$qj^\mu(x)$ は保存する電荷密度の流れである．したがってラグランジアン密度 (7.7) は外部の源による電磁場だけでなく，荷電粒子の流れによって生じる電磁場も含んでいるのである．

$q =$ [電子の電荷] $= -e$ と置き，m を電子質量とすると，式 (7.7) を量子化したものが量子電磁力学のラグランジアンになる．外部の電荷・電流分布 $J^\mu(x)$ を原子核系によるものと考え，原子核系の運動を点粒子の集合体のように扱えば，式 (7.7) は広範囲の化学や物性科学を記述できる基本的なラグランジアンとなる．次章において，量子電磁力学の驚くべき成果の一部を見ることにする．

7.3 ゲージ変換と対称性

第4章において，4元ポテンシャル A_μ が一意的でないことを強調した．ゲージ変換，

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x)$$

を施しても，ポテンシャルから得られる物理的な電場と磁場は変わらない．$\chi(x)$ は時空における任意の関数である．

ψ が4元ポテンシャル A_μ の下でのDirac方程式の解ならば，ゲージ変換後のポテンシャル A'_μ に対応するDirac場は，

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi}\psi$$

と与えられる．これは容易に証明できる．

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\partial_\mu - qA'_\mu)\psi' &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi}\{\mathrm{i}\partial_\mu + q\partial_\mu\chi - q(A_\mu + \partial_\mu\chi)\}\psi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi}(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu)\psi\end{aligned}$$

したがってDirac方程式 (7.6) は，次式と等価である．

$$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA'_\mu) - m\right]\psi' = 0$$

上記のような一般化された変換の組合せ，

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x) \tag{7.10a}$$

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi(x)}\psi(x) \tag{7.10b}$$

が，局所的ゲージ変換 (local gauge transformation) と呼ばれるものである．

電荷・電流密度 $qj^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は，局所的ゲージ変換の下で不変であり，$\partial_\mu J^\mu = 0$ ならば (4.3節と同様に) 作用も不変である．ここで注意を喚起しておくが，荷電Dirac場の位相，たとえば電子波の位相は，ゲージから派生する人工物に過ぎず，物理的な重要性を持たないという事実は興味深い．位相を測定することはできないのである．

この局所的ゲージ変換を，異なる観点から捉えることもできる．ラグランジアン (7.7) は大域的な $U(1)$ 変換 $\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi$ (α は定数) の下で不変である．$\chi(x)$ を時空内の任意の関数として，もしラグランジアンが“局所的な”変換 $\psi \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi(x)}\psi(x)$ の下でも不変でなければならないという要請を課するならば，ψ の変換に伴って生じる付加項を相殺するために“ゲージ場”A_μ を導入して，$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi$ という変換性をゲージ場に持たせなければならない．

この観点からすると電磁場は，荷電粒子場のラグランジアンが局所的位相変換の下で不変性を持つことの帰結として現れるものである．この概念は，後の章において更に一般化されることになる．

7.4　荷電共役変換

荷電共役（きょうやく）変換は物質と反物質を置き換える操作であって，たとえば変換後は陽電子を粒子と見なし，電子を陽電子の反粒子と解釈することになる．もし宇宙が物質でなく反物質を含むならば，このような見方のほうが自然であろう．荷電共役変換の操作は，Dirac場をその複素共役に置き換えることによって為される．時間依存因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}$ を持つ場の方程式の正エネルギーの解

を考えよう．これは荷電共役変換を施した後では因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}$ を持ち，通常の位相の扱い方の慣例から見ると，負エネルギーの解である．“空孔”の解釈では，負エネルギーの解は反粒子に関係している．しかしながら，複素共役の操作は $\mathcal{L}$ を不変に保たない．対称性を得るためには，更に別の操作を加えなければならない．

Dirac方程式 (7.6) の複素共役を取ると，

$$\left[(\gamma^\mu)^*(-\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi^* = 0$$

となる．カイラル表示では γ^0，γ^1，γ^3 が実で，$(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ である．上式に γ^2 を掛けて γ 行列の反交換性を用いると，

$$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + qA_\mu) - m\right](\gamma^2\psi^*) = 0$$

もしくは，

$$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA^C_\mu) - m\right](\gamma^2\psi^*) = 0$$

を得る．したがって ψ が電荷 q を持つ粒子に関する Dirac方程式の正エネルギー解であれば，$(\gamma^2\psi^*)$ は 4.6節で導入した荷電共役場 $A^C_\mu = -A_\mu$ における負エネルギー解である．

この変換には，細かい点で選択の余地がある．我々は粒子の荷電共役場 ψ^C を，

$$\psi^C = -\mathrm{i}\gamma^2\psi^* \tag{7.11a}$$

もしくは，2 成分スピノルで，

$$\psi^C_{\mathrm{L}} = -\mathrm{i}\sigma^2\psi^*_{\mathrm{R}}, \quad \psi^C_{\mathrm{R}} = \mathrm{i}\sigma^2\psi^*_{\mathrm{L}} \tag{7.11b}$$

のように定義する．

$(\gamma^2)^2 = -\mathbf{I}$，$(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ を用いると，式 (7.11a) の逆変換は次のようになる．

$$\psi = -\mathrm{i}\gamma^2(\psi^C)^* \tag{7.12a}$$

$$\psi_{\mathrm{L}} = -\mathrm{i}\sigma^2(\psi^C_{\mathrm{R}})^*, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \mathrm{i}\sigma^2(\psi^C_{\mathrm{L}})^* \tag{7.12b}$$

それから $((\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2$ に注意すると)，Hermite（エルミート）共役は，

$$\psi^\dagger = -\mathrm{i}(\psi^C)^{\mathrm{T}*}\gamma^2 \tag{7.13a}$$

$$\psi_{\mathrm{L}}^\dagger = \mathrm{i}(\psi_{\mathrm{R}}^C)^{\mathrm{T}}\sigma^2, \quad \psi_{\mathrm{R}}^\dagger = -\mathrm{i}(\psi_{\mathrm{L}}^C)^{\mathrm{T}}\sigma^2 \tag{7.13b}$$

である．ラグランジアン密度 (7.7) の各項の変換を見てみよう．まず次の項を考える．

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = -(\psi^C)^{\mathrm{T}}\gamma^2\gamma^0\gamma^2(\psi^C)^* = -(\psi^C)^{\mathrm{T}}\gamma^0(\psi^C)^*$$

(ここで γ 行列の性質を用いた．)

$\mathcal{L}$ 全体の不変性の確認のために，第 8 章の内容を先取りしなければならない．演算子としてのスピノル場は“反交換” (anticommute) する．すなわち 2 つの場の積の順序を入れ替えると負号が付く．たとえば $\psi_a^*\psi_b = -\psi_b\psi_a^*$ である．したがって上の最後の式において場の入れ替えを行うと，更に負号が加わり，元の項の形を回復する．

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}^C)\psi^C$$

($(\gamma^0)^{\mathrm{T}} = \gamma^0$ による．)

他の項も，同様にして負号を獲得する．

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= -(\psi^C)^{\mathrm{T}}\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2(\psi^C)^* \\ &= (\psi^C)^\dagger(\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2)^{\mathrm{T}}(\psi^C)\end{aligned}$$

しかし読者も容易に証明できるように，

$$(\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2)^{\mathrm{T}} = -\gamma^0\gamma^\mu$$

なので，次のようになる．

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -(\bar{\psi}^C)\gamma^\mu(\psi^C)$$

最後に，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\mathrm{i}\partial_\mu\psi &= -(\psi^C)^{\mathrm{T}}\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\mathrm{i}\partial_\mu(\psi^C)^* \\ &= \mathrm{i}\partial_\mu(\psi^C)^\dagger(\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2)^{\mathrm{T}}(\psi^C) \\ &= -\mathrm{i}\partial_\mu(\psi^C)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(\psi^C)\end{aligned}$$

であるが，作用の式において部分積分を考えると，この最後の項はラグラン

ジアン密度の中で $(\bar{\psi}^C)\gamma^\mu \mathrm{i}\partial_\mu(\psi^C)$ に置き換えることができる．

あとは変換後のポテンシャル A_μ^C が，$A_\mu^C = -A_\mu$ と定義され (4.6節)，外部の電荷・電流密度 J_μ も変換で符号を変えるならば，ラグランジアンは荷電共役変換後も，変換前と全く同じ形を持つことになる．通常の物質中で Dirac 粒子を電子と見なす場合，外部の電荷・電流密度 J_μ は原子核系から生じるが，これも荷電共役変換によって符号を変える．

7.5　ニュートリノと荷電共役変換

標準模型では，荷電共役対称性を持たない項も加わる．このことは左手型の場だけを含む自由ニュートリノのラグランジアン (6.32) を見れば分かる．式 (7.12b) と式 (7.13b) の変換を見ると，左手型の場と右手型の場の入れ替えが生じているので，明らかに荷電共役対称性は破れる．パリティ変換 (5.3節) に関しても，対称性は破れている．ここで読者は練習問題として，パリティ変換と荷電共役変換を組み合わせた操作の下では，このニュートリノのラグランジアンが不変であることを確認しておいてもらいたい．

7.6　荷電スカラー場の電磁力学

我々は 3.5節において，Klein-Gordon 方程式を導入した．

$$-\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0$$

この式は電荷を持たないスカラー粒子の運動を記述する．これに対応する荷電スカラー粒子を記述する方程式は，Klein-Gordon 方程式に対して，式 (7.5) の置き換え $\mathrm{i}\partial_\mu \to \mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu$ を施すことで得られる．

$$\left[(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu)(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu) - m^2\right]\Phi = 0 \tag{7.14}$$

式 (7.14) の解は，必然的に複素数になる．したがって電磁場中におけるスピンがゼロの荷電粒子を扱うためには，複素数 (もしくは2成分) の波動関数が必要となる．ここで 3.7節でも扱った複素スカラー場 $\Phi = (\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$ を導入する．式 (7.14) を導く Lorentz 不変な実数のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L} = -\left[(\mathrm{i}\partial_\mu + qA_\mu)\Phi^*\right]\left[(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu)\Phi\right] - m^2\Phi^*\Phi \tag{7.15}$$

と与えられる．上記の $\mathcal{L}$ は局所的ゲージ変換 $\Phi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi}\Phi$ の下で不変である．スピンがゼロの粒子はボゾンなので，場 Φ と場 Φ^* は交換する．

式 (7.14) の複素共役を取ると，与えられた外部電磁場の下で電荷 q を持つ粒子の解が $\Phi(x)$ であるならば，$\Phi^*(x)$ は電荷 $-q$ を持つ粒子の解であることが分かる．我々は Φ の荷電共役を $\Phi^C(x) = \Phi^*(x)$ と定義する．ここでも電磁ポテンシャルの荷電共役を $A^C_\mu = -A_\mu$ と定義しておけば，ラグランジアン密度 (7.15) は荷電共役変換 $\Phi \to \Phi^C$ の下で不変である．

電荷を持つ π^+ 中間子（メソン）と π^- 中間子（メソン）は，スピンがゼロの複合粒子であるが，その挙動は一般化されたKlein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式 (7.14) によって記述される．第9章の現象論的な議論において，これらの粒子と場 Φ および場 Φ^* の関係について見る予定である．

7.7　低エネルギーの粒子と Diracの磁気能率

Dirac方程式 (5.10) を，電磁場中の方程式に直すと，

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}\partial_0 - qA_0)\psi_\mathrm{L} - \sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\psi_\mathrm{L} - m\psi_\mathrm{R} = 0\\
&(\mathrm{i}\partial_0 - qA_0)\psi_\mathrm{R} + \sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\psi_\mathrm{R} - m\psi_\mathrm{L} = 0
\end{aligned} \tag{7.16}$$

となる．σ^i は Pauli のスピン行列である．

6.1節より，低エネルギー粒子に対応する Dirac方程式の解は $\psi_L \approx \psi_R$ である．ここで，低エネルギーにおいて，2 成分波動関数，

$$\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}(\psi_\mathrm{L} + \psi_\mathrm{R}) \tag{7.17a}$$

が，Schrödinger方程式の波動関数に帰着することを示そう．因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$ を挿入した理由は，Schrödinger方程式では粒子の静止質量に対応するエネルギーが省かれているからである．これと直交するもうひとつの関数，

$$\chi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}(\psi_\mathrm{L} - \psi_\mathrm{R}) \tag{7.17b}$$

を定義しておくと，式 (7.16) の和と差から，これと等価なひと組の方程式が得られる．

$$(\mathrm{i}\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\chi = 0$$
$$(\mathrm{i}\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\phi = 0 \tag{7.18}$$

もし $(\mathrm{i}\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi$ を $2m\chi$ に置き換えることができるならば，Schrödinger方程式が導かれる．この近似はCoulomb(クーロン)ポテンシャル qA_0 と運動エネルギーが，粒子の質量エネルギーに比べて小さいときに成立する．この場合，

$$\chi = (1/2m)\sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\phi$$

となり，これを代入すると，次式を得る．

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\sigma^i(\mathrm{i}\partial_i - qA_i)\sigma^j(\mathrm{i}\partial_j - qA_j) + qA_0\right]\phi \tag{7.19}$$

Pauliのスピン行列は，

$$\sigma^i\sigma^j = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij}\sigma^0$$

という性質を持ち，ε_{ijk} の反対称性によって，

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\phi = 0, \quad \varepsilon_{ijk}A_iA_j = 0$$

である．また $\varepsilon_{ijk}\left[\partial_i(A_j\phi) + A_i\partial_j\phi\right] = \varepsilon_{ijk}\left[\partial_i(A_j\phi) - A_j\partial_i\phi\right] = \varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j)\phi$ であって，$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$ を思い起こすと $\varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j) = B_k = -B^k$ は磁場 $\mathbf{B}$ を与える．これらの結果を用いて，式(7.19)は次のように書き換えられる．

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla - q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left(\frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right)\cdot\mathbf{B}\right]\phi \tag{7.20}$$

$-(q\boldsymbol{\sigma}/2m)\cdot\mathbf{B}$ の項を除くと，上式は電磁場中の荷電粒子に関するSchrödinger方程式と同じである．この余分の項は，外部磁場中で，Dirac粒子自体が持つ固有磁気能率(モーメント)から生じているエネルギーを表す項と解釈される．これがDirac方程式から導かれるもうひとつの驚くべき結果である．電荷 $q = -e$ を持つ電子の場合，固有磁気能率の大きさはBohr(ボーア)磁子(Bohr magneton) $\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m$ として与えられ，向きはスピンの反対方向となる．実際に観測される電子の磁気能率は，1％以内の精度で，この理論値と一致している(8.5節参照)．

式(7.20)の水準で考えると，静電場 A_0 だけが印加された粒子の挙動に関して固有磁気能率は何の役割も果たさない．これよりも良い近似を用いたり，も

しくは実際にDirac方程式を解いたりすると，“スピン-軌道結合”(spin-orbit coupling) の項が現れる．原子物理や物性物理において，この項の役割が重要となる場合もある．

練習問題　(＊解法とヒント p.291)

*7.1 Dirac場の平面波展開の式 (6.24) を用いて，保存する粒子数が次のように書けることを示せ．

$$\int P(x^0, \mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int \psi^\dagger \psi \mathrm{d}^3\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon}(b^*_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d_{\mathbf{p}\varepsilon} d^*_{\mathbf{p}\varepsilon})$$

*7.2 正エネルギーの解 (6.12) および (6.13) に荷電共役変換を施すと，負エネルギーの解 (6.17) が得られることを示せ．

*7.3 Dirac場同士が反交換するものとして，ニュートリノのラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi^\dagger_{\mathrm{L}} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_{\mathrm{L}}$$

が，パリティ変換と荷電共役変換を組み合わせた変換の下で不変であることを示せ (式 (5.26) と式 (5.27) に注意すること)．

*7.4 $\mathrm{i}\sigma^2\psi^*_{\mathrm{R}}$ がLorentz変換の下で左手型スピノルのように変換することを示せ．

*7.5 ラグランジアン密度 (7.15) からKlein-Gordon (クライン ゴルドン) 方程式 (7.14) を導出せよ．

*7.6 7.1節の方法を用いて，ラグランジアン密度 (7.15) の大域的な $U(1)$ 対称性 $\Phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Phi$ から電荷密度の流れ，

$$qj^\mu = \mathrm{i}q\big[\Phi^*(\partial^\mu\Phi) - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi\big] - 2q^2 A^\mu \Phi^*\Phi$$

の保存則を導け．(Dirac場のラグランジアンから導かれる式 (7.9) と違い，複素スカラー場の電流密度は A^μ に比例する項を含むことに注意せよ．)

*7.7 Dirac方程式の正エネルギー解 (6.12) と (6.13) に関して，

$$qj^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = -e(\cosh\theta, 0, 0, \sinh\theta) = -(eE/m)(1, 0, 0, v)$$

であり，また負エネルギー解 (6.17) に関しても，

$$qj^\mu = -(eE/m)(1, 0, 0, v)$$

となることを示せ．Diracの解釈によると，電子の“海”からこの負エネルギー状態の電子を抜き取った後に残る空孔は，電荷が e で z 方向に速度 v を持つ粒子のように振舞う．

*7.8 荷電共役変換によって陽電子は負の電荷を持ち，電子は正の電荷を持つようになることを示せ．

*7.9 電磁ポテンシャルは，時間反転操作 $t \to t' = -t$ の下でどのように変換するか？ $\psi(t)$ を Dirac 方程式の解とすると，$\gamma^1\gamma^3\psi^*(t)$ は時間反転した Dirac 方程式の解であることを示せ．

7.10 ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ によって与えられる磁場 $\mathbf{B}$ の中の Dirac 粒子に関して，ψ_{L} と ψ_{R} が両方とも次式を満たすことを示せ．

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (-\mathrm{i}\nabla - q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi = 0$$

磁場中の荷電スカラー粒子に関する Klein-Gordon（クライン ゴルドン）方程式と比べて，上式では $q\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$ の項が余分に加わっていることに注意せよ．

7.11 パリティ変換の式 (4.18) および (5.27) を用いて，ラグランジアン密度 (7.7) が空間反転の下で不変であることを示せ．

第 **8** 章

場の量子化：量子電磁力学

本章では，第 7 章で導入した電磁力学的な場の系の量子化に取り掛かる．今までのところ我々は，電磁場と Dirac 場を古典場として扱ってきた (第 7 章で Dirac 場同士が反交換するという認識を強いられたけれども)．これらの場に量子化を施すと，系の状態へと作用する場の演算子になる．古典的な場の全エネルギーは，量子化によってハミルトニアン演算子になり，量子場の系の力学的挙動を決める．我々は消滅演算子 (annihilation operator) と生成演算子 (creation operator) による定式化を採用する．この形式に馴染んでいない読者のために，これらの演算子の性質を付録 C に簡単にまとめておいた．

量子電磁力学 (quantum electrodynamics：QED) は標準模型の重要な構成要素であり，また物質界を原子レベルで理解するための基礎でもある．しかしながら原子の中の電子や物質中の電子を扱う際に必要な，複雑な技法には立ち入らないことにする．本章では，系が少数の光子，電子，陽電子だけを含み，相互作用はあるが，電子や陽電子の束縛系を無視できるくらい充分にエネルギーの高い状況だけを考察する．このような状況下では，QED の自由場近似を出発点と見なして，粒子間の相互作用を，各粒子の自由な挙動に対する摂動として理解することができる．

本書は場の量子論の教科書ではないので，本章における摂動論 (perturbation theory) の記述は皮相的な概説にすぎない．我々の意図は，後の章で提示される計算結果を得る方法に関して，最低限の見通しを読者に与えることにあ

る．“ 繰り込み ” (renormalization) という処方の必要性を説明することも試みるが，この概念は標準模型全体の定式化においても重要である．

8.1　ボゾン場とフェルミオン場の量子化

すでに紹介してある古典場の中でも最も単純なものは，Klein-Gordon 方程式 (3.19) を満たす質量を持つ自由スカラー粒子の場である．場の平面波展開 (3.21) に現れる古典的な振幅 $a_{\mathbf{k}}$ および $a_{\mathbf{k}}^*$ は普通の複素数であった．このスカラー粒子の理論を量子化してみよう．$a_{\mathbf{k}}$ を消滅演算子と見なすことにする．$a_{\mathbf{k}}^*$ は $a_{\mathbf{k}}$ の Hermite 共役にあたる生成演算子 $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ に置き換わる．これらの演算子が次の交換関係に従うものとする．

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \tag{8.1}$$

場の全エネルギー (3.30) は，次のハミルトニアン演算子になる．

$$H = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \tag{8.2}$$

ここで $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ であり，上記の交換関係から $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ が粒子数演算子にあたることが導かれる (付録C)．第 3 章で行ったように，本章でもすべての粒子が，辺の長さ l，体積 $V = l^3$ の立方体領域内にあるものとして周期境界条件を適用する．ハミルトニアンとしては，対称性の高い，

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) = \sum_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega_{\mathbf{k}} \tag{8.3}$$

という形ではなく，“ ゼロ点エネルギー ” (zero point energy) を省いた式 (8.2) を採用して真空状態 $|0\rangle$ のエネルギーをゼロにする．基底状態から励起した，ハミルトニアンの固有状態は，粒子 (たとえば π^0 中間子 や Higgs ボゾン) が生じた系と解釈することができ，各状態 $\mathbf{k}$ にある粒子数を表す一連の整数 $n_{\mathbf{k}}$ によって系の状態が表現される．$n_{\mathbf{k}}$ は粒子数演算子 $N_{\mathbf{k}}$ の固有値であり，ここで扱う粒子は Bose-Einstein 統計に従う．

4.4 節の放射ゲージを採用すると，自由空間における電磁場は Klein-Gordon 場とよく似た方法で量子化される．展開式 (4.15) に現れている波の振幅 $a_{\mathbf{k}\alpha}$

と $a^*_{\mathbf{k}\alpha}$ は，消滅演算子 $a_{\mathbf{k}\alpha}$ と生成演算子 $a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}$ になり，場の全エネルギー (4.25) は次のハミルトニアン演算子になる．

$$H_{\rm em} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha} \omega_{\mathbf{k}} \tag{8.4}$$

ここでは $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ である．演算子 $a_{\mathbf{k}\alpha}$ と $a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}$ は，波数ベクトル $\mathbf{k}$，偏極 α の "光子" (photon) を消滅・生成させる演算子であり，次の交換関係を満たす．

$$[a_{\mathbf{k}\alpha}, a^\dagger_{\mathbf{k}'\alpha'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}, \quad [a_{\mathbf{k}\alpha}, a_{\mathbf{k}'\alpha'}] = 0, \quad [a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}, a^\dagger_{\mathbf{k}'\alpha'}] = 0 \tag{8.5}$$

$N(\mathbf{k},\alpha) = a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}$ は粒子数 (光子数) 演算子である．放射場 (電磁場) のエネルギー固有状態は，各状態の光子数によって特定される．スカラー粒子と同様に，光子もBose-Einstein（ボーズ アインシュタイン）統計に従う (問題8.1 参照)．

自由電子を表す Dirac 場を量子化する場合にも，展開式 (6.24) に現れる波の振幅と，その複素共役が演算子になる．$b_{\mathbf{p}\varepsilon}$ と $b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon}$ は運動量 $\mathbf{p}$，ヘリシティ ε の電子を消滅・生成させ，$d_{\mathbf{p}\varepsilon}$ と $d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon}$ は運動量 $\mathbf{p}$，ヘリシティ ε の陽電子を消滅・生成させる．電子と陽電子はフェルミオンであり，これらの演算子は反交換関係を持つ．たとえば，

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{p}\varepsilon} b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'} + b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}'\varepsilon'} = \{b_{\mathbf{p}\varepsilon}, b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'} \\ \{b_{\mathbf{p}\varepsilon}, b_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} &= 0 \\ \{b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon}, b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}\} &= 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

である．$d_{\mathbf{p}\varepsilon}$ と $d^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}$ も同じ規則に従う．またすべての電子の演算子は，すべての陽電子の演算子と反交換する．電子数演算子 $N_{\rm e}(\mathbf{p},\varepsilon) = b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon}$ と陽電子数演算子 $N_{\rm p}(\mathbf{p},\varepsilon) = d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}$ の固有値として許容される値は 0 と 1 だけであり，Pauli の排他律に整合する (付録C)．電子と陽電子は Fermi-Dirac 統計に従う (問題8.2 参照)．

第二量子化 (場の量子化) をしてしまうと，Dirac 方程式を 1 粒子波動関数の式と考えていたときの困難は解消する．電子と陽電子は互いに似たような存在になってしまい，負エネルギー状態を満たした "海" を敢えて持ち出す必要はなくなる．Dirac 場の全エネルギー (6.25) は，次のハミルトニアンに移行する．

$$H = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d_{\mathbf{p}\varepsilon} d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon}) E_{\mathbf{p}}$$

反交換関係を用いると，これを次のように書き換えることができる．

$$H = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon} - 1) E_{\mathbf{p}}$$

定数のゼロ点エネルギー (フェルミオン系では負になることに注意) の項を省くと，ハミルトニアンは次のようになる．

$$H = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}) E_{\mathbf{p}} \tag{8.7}$$

こうすると真空状態のエネルギーはゼロとなり，励起状態は電子や陽電子が存在する系を表す．

エネルギーと同様に，場の運動量 (6.26) も，次の運動量演算子になる．

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}) \mathbf{p} \tag{8.8}$$

保存する粒子数 (問題7.1) は，次のような時間に依存しない演算子になる．

$$\int P(x^0, \mathbf{x}) \mathrm{d}^3\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} + d_{\mathbf{p}\varepsilon} d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon})$$

これも定数分の変更を加えて，新たに，

$$[\text{保存する粒子数演算子}] = \sum_{\mathbf{p},\varepsilon} (b^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} b_{\mathbf{p}\varepsilon} - d^\dagger_{\mathbf{p}\varepsilon} d_{\mathbf{p}\varepsilon}) \tag{8.9}$$

とすると都合がよい．この演算子は電子数から陽電子数を差し引いた数を与えるので，量子電磁力学において定数となる．

8.2　時間依存

Schrödinger描像では，系の状態が時間に依存する．ハミルトニアン H によって表される系の，初期時刻 t_0 における状態 $|t_0\rangle$ と，時刻 t における状態 $|t\rangle$ は，

$$|t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} |t_0\rangle$$

という関係を持つ．この時間発展は，ユニタリー演算子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ によって生成される．

時間にあらわに依存しない演算子 $\hat{O}$ の，時刻 t における期待値は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\langle t|\hat{O}|t\rangle &= \langle t_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}H(t-t_0)}\hat{O}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)}|t_0\rangle \\ &= \langle t_0|\hat{O}_{\mathrm{H}}(t-t_0)|t_0\rangle\end{aligned}$$

ここで，時刻 t に依存する演算子，

$$\hat{O}_{\mathrm{H}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\hat{O}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \tag{8.10}$$

を導入した．

後者の式は，いわゆる Heisenberg（ハイゼンベルク）描像を与えている．この描像では系の状態が固定されており，演算子が時間に依存する．自由場の消滅演算子と生成演算子の時間依存は単純である．たとえばスカラー場 (式 (3.21) 参照) では，状態 $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ に対するこれらの演算子の作用を考えれば分かるように，

$$a_{\mathbf{k}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}a_{\mathbf{k}}, \quad a^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}a^{\dagger}_{\mathbf{k}} \tag{8.11}$$

となる (付録C)．通常，自由場の量子論では Heisenberg 描像が採用される．

相互作用している場を扱うならば，我々が先ほど決めた自由場の基本状態は，もはや全ハミルトニアンの固有状態ではない．量子電磁力学のハミルトニアンは，

$$H = H_0 + V \tag{8.12}$$

$$H_0 = H(\text{光子}) + H(\text{電子}) + H(\text{陽電子})$$

と表され，後者の式の各項は，式 (8.4) と式 (8.7) によって与えられる．H_0 の固有状態は，自由に運動する光子，電子，および陽電子を含む系である．

相互作用項 V は，第 7 章で構築したラグランジアン密度 (7.7) における $-q(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}$ の項から生じる．ここでは外場を考えない．V は場の微分に依存しないので，T^0_0 への寄与は単に $q(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}$ であり，電子について $q=-e$ と置くと $t=t_0$ において，

$$V(t_0) = -e\int\bar{\psi}(\mathbf{r},t_0)\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{r},t_0)A_{\mu}(\mathbf{r},t_0)\mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{8.13}$$

を得る．ここで場の時間発展が，自由場の発展とは異なることに注意しなければならない．相互作用項を含む全ハミルトニアン $H = H_0 + V$ によって時間発展が決まる．

式 (4.15) と式 (6.24) の中の各波の振幅を適切な演算子に置き換えて，初期時間 t_0 における場 A_μ と場 ψ の展開式と見なす．V を展開すると 8 種類の項が現れる．$t_0 = 0$ においてひとつの項を取り上げてみると，たとえば，

$$-\frac{em}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{p}'}E_{\mathbf{p}''}}}\left[\bar{u}_{\varepsilon'}(\mathbf{p}')\gamma^\mu v_{\varepsilon''}(\mathbf{p}'')\varepsilon_\mu\right]b^\dagger_{\mathbf{p}'\varepsilon'}d^\dagger_{\mathbf{p}''\varepsilon''}a_{\mathbf{k}\alpha}\delta_{(\mathbf{k}-\mathbf{p}'-\mathbf{p}''),\mathbf{0}} \tag{8.14}$$

という項がある．この項は光子を消滅させ，電子-陽電子対(つい)を生成する．条件 $\mathbf{k} - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'' = \mathbf{0}$ は指数関数因子の空間積分から生じており，運動量を正確に保存させる．

場の量子論の力学的な計算は，指定された初期状態に対するユニタリー演算子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ の作用の計算と見ることができる．量子電磁力学では電子の電荷 e の値によって，放射場と Dirac 場の結合エネルギー (8.13) の大きさが決まっている．結合の“強さ”を見るためには，ここで“微細構造定数”(fine structure constant) と呼ばれる無次元のパラメーター α を導入するのが自然である．

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

放射場と Dirac 場の結合の強さ α は，非常に小さい値を持っている．時間発展演算子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$ を，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\left[1 + e\hat{O}_1(t) + e^2\hat{O}_2(t) + \ldots\right] \tag{8.15}$$

という展開式から構築する手法によって，量子電磁力学に多大な進展がもたらされた．各次数の $\hat{O}_n(t)$ は時間に依存する演算子である．

8.3　摂動論

摂動展開 (8.15) を構築するために，まず，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t}\right]^n, \quad \delta t = t/n$$

を考える．n が充分大きい (δt が小さい) 場合は，Taylor(テイラー)展開の高次の項を省いて，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\delta t} = 1 - \mathrm{i}H\delta t$$

と置ける．そうすると，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \left[1 - \mathrm{i}(H_0 + V)\delta t\right]^n$$

となる．最低次の摂動論では V に関して 1 次の項だけを残して，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t} e\hat{O}_1(t) &= -\mathrm{i}\sum_{r=0}^{n-1}[1 - \mathrm{i}H_0\delta t]^{n-1-r} V\delta t [1 - \mathrm{i}H_0\delta t]^r \\ &= -\mathrm{i}\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0(t-t')} V\delta t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t'} \quad (t' = r\delta t)\end{aligned}$$

と書ける．n は充分大きいものとする．

$\delta t \to 0$ の極限では，和が積分に置き換わって次式を得る．

$$e\hat{O}_1(t) = -\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t'} V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t'} \tag{8.16}$$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t'}$ は単純な自由場の時間発展演算子である．時刻 $t = 0$ における V が式 (8.13) で与えられるなら，非摂動の時間依存性を持つ Dirac 場と電磁場を用いて，

$$\hat{O}_1(t) = \mathrm{i}\int_0^t \bar{\psi}(\mathbf{r}', t')\gamma^\mu \psi(\mathbf{r}', t') A_\mu(\mathbf{r}', t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{8.17}$$

と書ける．たとえば式 (8.14) のような項は，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}''})t'} \tag{8.18}$$

という時間依存性を持つ (式 (8.11) 参照)．

過去 $-t/2$ から未来 $t/2$ までの時間発展は，式 (8.17) の積分範囲を $-t/2$ から $t/2$ に取り直した式で表される．この対称性のよい積分式のほうが，粒子の散乱過程の記述に適している．たとえば時刻 $-t/2$ の初期状態において，状態 $(\mathbf{k}, \alpha)$ の光子がひとつある状態を考えると，式 (8.14) が含む各演算子は，この光子を消滅させ，状態 $(\mathbf{p}', \varepsilon')$ の電子と状態 $(\mathbf{p}'', \varepsilon'')$ の陽電子をひ

とつずつ生成する．因子 (8.18) の $t \to \infty$ の極限を取ると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}''})t'} \mathrm{d}t' = 2\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}''})$$

となって，エネルギーも運動量と同様に正確に保存するようになる．自由空間では，運動量保存とエネルギー保存を両立させつつ，ひとつの光子から電子-陽電子対を生成する過程を考えることは不可能であって (問題8.3)，1次の摂動は寄与を持たない．(原子核の Coulomb 場のような外部電磁場を想定すれば，自由空間のような光子と電子-陽電子の運動量保存の制約は外れて $\omega_{\mathbf{k}} > 2m$ のときに対生成が可能となる．)

時刻 t において1次遷移の振幅がゼロでない場合，式 (8.16) により次式を得る．

$$\langle \text{終状態 f} \,|e\hat{O}_1(t)|\, \text{初期状態 i} \rangle = \langle \mathrm{f}|V(0)|\mathrm{i}\rangle \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E t'} \mathrm{d}t'$$

$\Delta E = E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{f}}$ で，E_{i} および E_{f} はそれぞれ初期状態 $|\mathrm{i}\rangle$ および終状態 $|\mathrm{f}\rangle$ のエネルギーである．量子力学の教科書では，初期状態 i から終状態 f への遷移頻度 (単位時間あたりの遷移確率) が，$E_{\mathrm{f}} = E_{\mathrm{i}}$ の終状態におけるエネルギー状態密度を $\rho(E_{\mathrm{f}})$ として，

$$[\text{遷移頻度}] = 2\pi\left|\langle \mathrm{f}|V(0)|\mathrm{i}\rangle\right|^2 \rho(E_{\mathrm{f}})$$

であることが示されている§.

---

§ (訳註) いわゆる"Fermiの黄金律"だが，これは1次摂動の近似である (状態 i と状態 f の間に中間状態を想定しないので $\langle \mathrm{f}|V|\mathrm{i}\rangle$ という行列要素しか現れていない)．正確な遷移頻度は等エネルギー遷移行列 $T^{\mathrm{E}}_{\mathrm{fi}}$ を用いて ($\hbar$ も明示すると) $(2\pi/\hbar)|T^{\mathrm{E}}_{\mathrm{fi}}|^2\rho(E_{\mathrm{f}})$ と表される (終状態を1つだけ想定するなら $\Gamma_{\mathrm{fi}} = (2\pi/\hbar)|T^{\mathrm{E}}_{\mathrm{fi}}|^2\delta(E_{\mathrm{f}} - E_{\mathrm{i}}) = (\mathrm{Volume})(2\pi/\hbar)^4\delta^4(P_{\mathrm{f}} - P_{\mathrm{i}})|T_{\mathrm{fi}}|^2$．$P_{\mathrm{i}}$，$P_{\mathrm{f}}$ はそれぞれ反応前，反応後における全粒子の4元運動量の総和)．ここで量子場の摂動論の解説でよく用いられる S，T，U の各行列 (演算子) の関係をまとめておく．高次摂動までの効果をすべて含んだ遷移行列は，S 行列との $S_{\mathrm{fi}} = \delta_{\mathrm{fi}} - 2\pi\mathrm{i}\delta(E_{\mathrm{f}} - E_{\mathrm{i}})T^{\mathrm{E}}_{\mathrm{fi}} = \delta_{\mathrm{fi}} - (2\pi)^4\mathrm{i}\delta^4(P_{\mathrm{f}} - P_{\mathrm{i}})T_{\mathrm{fi}}$ という関係によって規定される．S_{fi} は無次元で，$T^{\mathrm{E}}_{\mathrm{fi}}$ はエネルギーの次元を持つ．類書でよく用いられる T_{fi} (一般の高次計算では，これをダイヤグラムで計算する) は4元運動量保存を前提とした遷移行列で P^4 $(= P^3E)$ の次元を持つ．S 行列の要素は相互作用表示の時間発展演算子 $U(t,t') = e^{-\mathrm{i}V(t-t')/\hbar}$ を用いて $S_{\mathrm{fi}} = \langle \mathrm{f}|U(\infty, -\infty)|\mathrm{i}\rangle$ と表される ($t, t' \to \pm\infty$ の扱い方に少々技巧を要する)．QED の摂動展開では $U(t,t') = 1 + e\hat{O}_1(t-t') + e^2\hat{O}_2(t-t') + \cdots$ となる (式 (8.15) 参照)．$\rho(E_f)$ や1次の遷移頻度の計算の具体例については問題9.2～9.4，問題9.11，問題10.1，問題12.3，問題13.3 などを参照されたい．

さらに高次の摂動展開項も直接に導出できる．たとえば，

$$\hat{O}_2(t) = \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{d}^4 x_2 \bar{\psi}(x_2)\gamma^\mu \psi(x_2) A_\mu(x_2) \int_{-t/2}^{t/2} \mathrm{d}^4 x_1 \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1) \tag{8.19}$$

である．ここで $x_1 = (t_1, \mathbf{r}_1)$，$x_2 = (t_2, \mathbf{r}_2)$，$-t/2 < t_2 < t/2$ である．

8.4　繰り込みと繰り込み可能性

2 次の摂動では，時空点 x_1 において電子-陽電子対(つい)が生成し，x_2 において その対が消滅する過程を扱うことができる．このような過程は図8.1のダイヤグラムで表される．これらのダイヤグラムでは，時間の流れを左から右の向きに設定してある．x_1 および x_2 において運動量は保存する．全体としてのエネルギーと運動量も保存するので，時刻 t_2 において再生する“非摂動の”光子は，最初の非摂動光子と同じ状態になる．

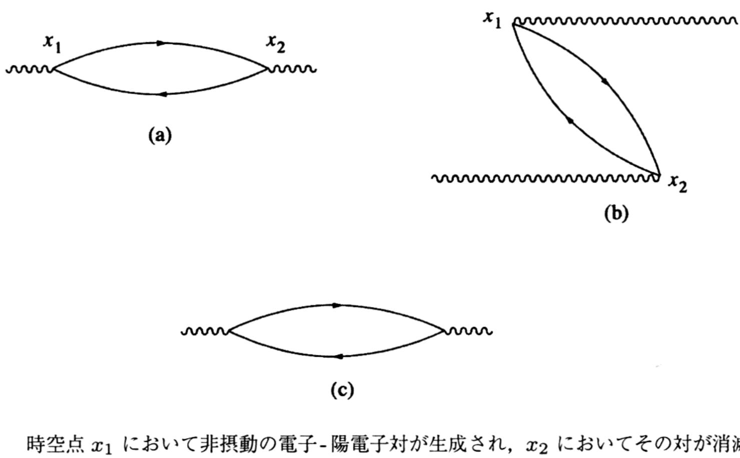


図8.1　時空点 x_1 において非摂動の電子-陽電子対が生成され，x_2 においてその対が消滅するダイヤグラム．(a) では初期状態の非摂動光子が x_1 において消滅し，x_2 において再び生成する．(b) は逆である．(a) と (b) は時間を左から右向きに取って描いてある．Feynman が示したように，これら両方の過程を単一の Feynman ダイヤグラム (c) でまとめて扱うと便利である．これらの図においてフェルミオン線の矢の向きは，電子数の方向を表している．(陽電子の方向を示すならば，時間に関して反対向きになる．)

我々は自由空間において光子から真の e^-e^+対(つい)を生成できないことを既に指摘した．このダイヤグラムに現れる e^-e^+対は仮想的 (virtual) なもので，摂動展開項の中の因子に対応する．遷移振幅，

$$\langle\mathbf{k}|e^{-iH_0t}\hat{O}_2(t)|\mathbf{k}\rangle = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\langle\mathbf{k}|\hat{O}_2(t)|\mathbf{k}\rangle$$

は消えずに残る．これを見ると“現実の”光子が実は複雑な対象であることが明らかである．計算によると，真空は仮想的な e^-e^+対の効果のために，電気的に分極する媒質のように振舞うことになる．たとえば2つの“裸の電子”の間の Coulomb 相互作用は遮蔽される．我々は裸の各電子の周囲に仮想的な陽電子の雲が生じていて，裸の電子の電荷を定常的に遮蔽しているような描像を想定できる．雲を形成している正電荷に対応する仮想 e^-e^+対の負電荷の方は，粒子系を閉じ込めている立方体領域の表面電荷として現れる．

実験的に電子の電荷 $-e$ として測定される数値は，遮蔽を受けた結果として見えている電荷量である．遮蔽の効果を考慮して電子系を扱うためには，ラグランジアンの中の e を“裸の電荷”$e_0 = e + \Delta e$ に置き換えなければならない．電荷の扱い方をこのように修正すると，ラグランジアンにおいて“相殺項”(counter term) が現れる．Δe の値は e を用いた相互作用項による遮蔽効果をちょうど打ち消すように選ぶ‡．2次摂動の計算では無次元量 A_1 を用いて $\Delta e = \alpha A_1 e$ と与えられ，この次数までで考えて，遮蔽された電子の電荷が $-e$ になる．さらに高次の摂動までを考えると，補正電荷は次のようになる．

$$\Delta e = e\left[\alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots\ \right]$$

どの次数までの摂動を扱うにしても，e を実測値に合わせるようにしておい

‡ (訳註) ラグランジアンなりハミルトニアンを [主要項] + [e_0を用いた相互作用項] という形にして，計算の結果として遮蔽を受けた電荷量 e が導かれるという考え方のほうが自然に思えるが，残念ながら本節の末尾で言及される発散の問題があって e_0 を有限値で評価できないために，この手続きは現実には不可能である．そこで逆に e を基調として [主要項] + [eを用いた相互作用項] + [e_0とeの違いを戻す相殺項] という形を考え，第2項と第3項を摂動として扱う (質量や場にも同時に似たような措置を施す)．第3項を適切に調整すると，第2項から生じる発散が打ち消されて摂動項全体としては有限値を与えるようになり，その結果は実験値と驚異的な精度で一致する (次節参照)．

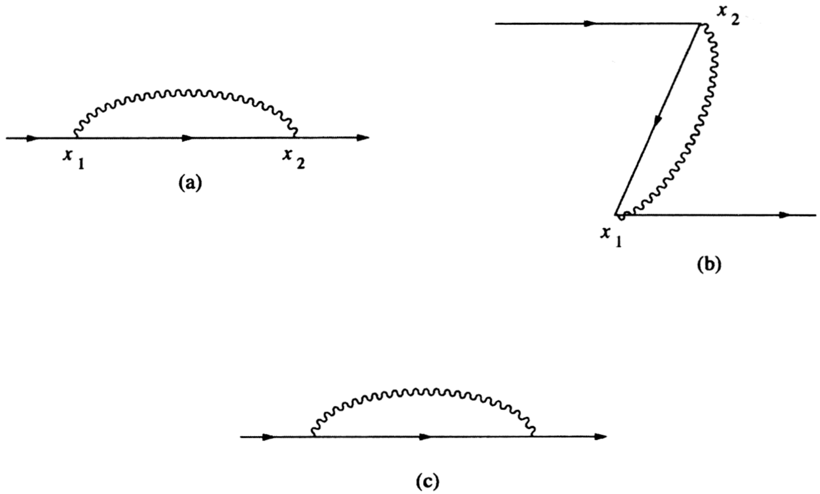


図8.2 非摂動の光子が時空点 x_1 で生成し，x_2 で消滅するダイヤグラム．(a) では，初期状態の非摂動電子が x_1 で消滅し，x_2 において再び初期状態と同じ状態の電子が生成する．(b) はその逆である．(a) と (b) 両方において，時間の流れは左から右の向きに設定してある．両方の過程を，ひとつの Feynman ダイヤグラム (c) で代表させると便利である．これらのダイヤグラムにおいて，フェルミオン線の矢の向きは，電子数の向きを表す．(陽電子の方向は，時間に関して反対向きになる．)

て，摂動展開の計算に現れる各項を，物理的な各過程の効果に対応させる．このような電荷の扱い方をする場合に，電子の電荷 $-e$ は“繰り込まれている”(renormalised) と言う．補正電荷 Δe 自体を測定することはできないが，原子物理において，真空偏極項に依存する物理的な効果が計算され，実験結果と高い精度で一致することが示されている (16.3節も参照).

量子電磁力学に現れるもうひとつの基本的なパラメーターは，電子の質量である．裸の電子の質量は，2 次の摂動では図8.2 のような過程のために修正される．この修正を繰り込むために，ラグランジアンには $m_0 = m - \Delta m$ を用い，Δm によって電子-光子相互作用から生じる質量のずれを相殺しなければならない．我々は裸の電子が仮想光子の“衣をまとっている”という描像を持つことができる．2 次摂動では無次元量 B_1 を用いて $\Delta m = \alpha m B_1$ と与えられる．一般の次数まででは，

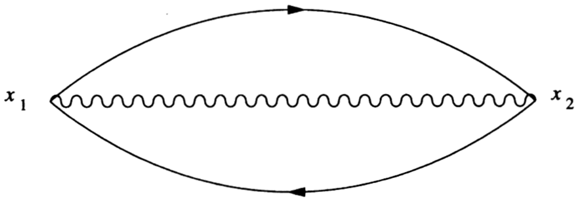


図8.3　真空過程の一例を示した図．量子電磁力学の真空状態は非摂動の真空と異なり，真空過程を含む．

$$\Delta m = m\left[\alpha B_1 + \alpha^2 B_2 + \dots\ \right]$$

となる．Δe と同様に Δm も，取り上げる摂動次数の範囲に応じて辻褄を合わせなければならない．このように実測値 e，m を基調として相殺項を導入した形式の摂動計算から，種々の物理的な数値を導き出す系統的な方法が確立されている．物理的に観測される質量 m は“繰り込まれた質量”である．

図8.3のように仮想 e^-e^+対と仮想光子が同時に生成して同時に消滅するダイヤグラムは，真空エネルギーを修正する項を与える．摂動によるエネルギーのずれも，あらかじめ予想されることだが，我々は非摂動の真空を用意できないので，そのようなエネルギーのずれ量を測定することもできない．一般相対性理論における宇宙定数は，真空エネルギー密度を与えるが，この値はゼロと置いても支障がないくらい極めて小さいことが知られている．我々は真空エネルギー密度を，その機構はどうであれゼロと見なすことにする．

摂動によって電荷と質量に繰り込みの効果が現れることは，計算をしなくてもあらかじめ予想しうることだが，量子電磁力学の扱い難い点は，定数 A_i，B_i も真空エネルギーの補正も，すべて無限大に発散してしまうことである．補正量である Δe や Δm 自体は観測できないので，それはそれで構わないという見方もできる．しかしながら，小さな α に関して展開したはずの項が，測定不可能な無限大の補正を与えてしまうことになる．場も繰り込まれて有限の補正を受けるが，それはさておき QED の重要な特徴は，パラメーター e，m と真空エネルギーの部分だけに無限大の発散が関与するという点である．ラグランジアンに加えなければならない無限大の相殺項は，これらのパラメーターの修正として導入される形のものだけである．相殺項の導入と調整によって無限大の発散を打ち消した後に残る物理的な効果は，計算可能で

有限である．

QED に見られるような発散の問題は，すべての局所的な場の理論に共通するものである．無限大を，理論が含む有限個の基本パラメーターに帰することのできる場の理論を，“繰り込み可能”(renormalisable) な理論と言う．

8.5 電子の磁気能率

電子の磁気能率(モーメント)の計算を通じて，観測量の計算に関する QED の目覚しい成果を見てみることにする．第 7 章では第二量子化する前の Dirac 方程式を用いて，電子がスピンの反対方向に磁気能率 $\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/2m$ を持つことを導いた．実際の電子の磁気能率は高い精度で測定されている．実験値 μ_{e} は，

$$\mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{B}}(1+a)$$

と表され，“異常率”は $a = 0.001\,159\,652\,188\,4(43)$ である (Van Dyck *et al.* 1987)．

第二量子化を施すと，Dirac の値に対する摂動補正を計算できる．Dirac の値自体は $\hat{O}_1$ の式 (8.16) に含まれ，図8.4 のダイヤグラム (a) に関係する．この最低次の計算において Dirac の結果 $\mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{B}}$ が再現される．

μ_{B} はパラメーター e，m_{e} と $\hbar$ を組み合わせた磁気能率の次元を持つ量であり，高次の摂動は次のような形で補正項を生じる．

$$\mu_{\mathrm{e}} = \mu_{\mathrm{B}}\left(1 + \alpha C_1 + \alpha^2 C_2 + \alpha^3 C_3 + \alpha^4 C_4 + \ldots\right)$$

各 C_i は無次元の定数である．理論値と実験値を比較するために，理論値の計算に適用する微細構造定数として，次の値 (1986年) を用いる．

$$\alpha^{-1} = 137.035\,997\,9(32)$$

C_1 は図8.4 のダイヤグラム (b) に関係する．計算すると $C_1 = 1/(2\pi)$ である．したがって，この次数までの結果は，

$$a = C_1\alpha = 0.001\,161\,409\,74$$

となる．これは実験値と小数第 4 位まで一致している．

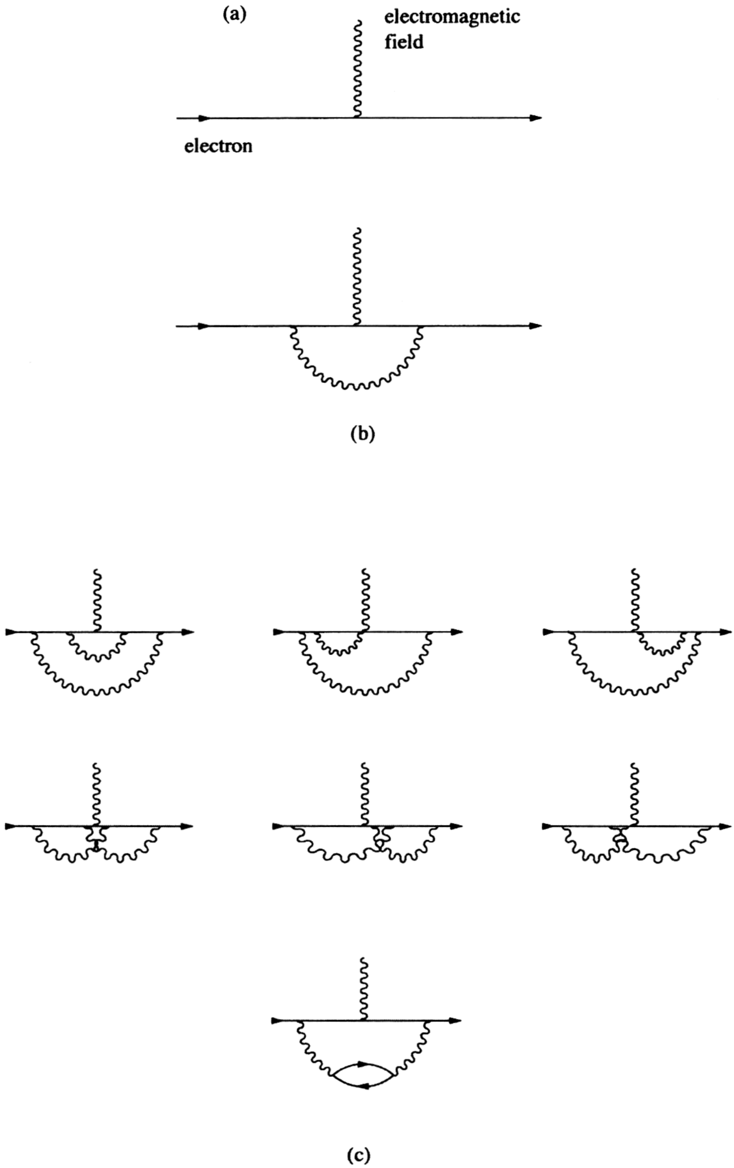


図8.4　電子の磁気能率への寄与を持つ摂動の Feynman ダイヤグラム．α^2 までの次数の異常磁気能率は，(b) と (c) のダイヤグラムで表される過程によるものである．

次の次数の補正は，図8.4の(c)のダイヤグラムで表されるが，

$$C_2 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{197}{144} + \frac{3}{4}\zeta(3)\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{12}$$

となる．$\zeta(z)$ は Riemann(リーマン) のゼータ関数である．この次数までで，

$$a = 0.001\,159\,637\,44$$

であり，実験値と小数第7位まで一致する．

さらに高次の摂動になると，計算は非常に手の込んだ扱い難いものになってゆく．数値評価をすると $C_3 \approx 0.03792$，$C_4 \approx -0.014$ である．しかしこの水準になると，標準模型の他の部分，特にミュー粒子の関与する過程のほうが，大きな補正を与える．最も新しい包括的な計算 (Kinoshita and Lindquist 1990) によると，

$$a = 0.001\,159\,652\,140\,0(41 + 53 + 271)$$

であり，実験値と小数第10位まで一致している．理論計算が含む最大の誤差要因は，α^{-1} の精度の問題である．

量子電磁力学は，その適用可能な範囲において，自然を驚異的な正確さで記述するモデルになっている．摂動論における繰り込みという便法の妥当性も，かなりの程度まで信用してよいものと思われる．

8.6　標準模型の量子化

本章では，特に量子電磁力学においてとりわけ成功を収めた“正準量子化”(canonical quantisation) を概説した．この主題を取り上げている本は多い(たとえば Itzykson and Zuber 1980 など)．詳細な計算を行う能力と自信を持ちたいならば，このような本を用いて勉強する必要がある．しかしこの後の各章で，実験結果との比較が必要となる各種の崩壊頻度や断面積の計算は，いわゆる“樹形(ツリー)ダイヤグラム”(tree diagram) による摂動だけで良好な近似ができる．樹形ダイヤグラムとは，閉じたループを**含まない**ダイヤグラムのことであるが (図8.4(a) 参照)，このようなダイヤグラムの計算は，繰り込みを必要としない．幸いにも低次の摂動論において，これらのダイヤグラムは

容易に計算できるのである.

弱い相互作用や強い相互作用をする粒子の系も，局所的ゲージ場の理論によって記述されるが，後に続く各章においてこれらを古典論の範囲で提示する予定である．量子色力学における量子化の操作は，径路積分による量子化の方法を採用することで成功を収めている (たとえば Cheng and Li 1984). 弱い相互作用の理論にも強い相互作用の理論にも，それぞれに固有の問題はあるが，ゲージ対称性の原理と繰り込み可能性が，標準模型の構築に不可欠な，基本的な役割を果たしてきた.

練習問題　(* 解法とヒント p.293)

8.1 スカラーボゾン (8.1節) の 2 粒子状態は，一般に，

$$|\,\text{状態}\,\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} f(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\, a^\dagger_{\mathbf{k}_1} a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|0\rangle$$

と書ける．規格化条件を除けば，$f(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ は $\mathbf{k}_1$ および $\mathbf{k}_2$ を引数とする任意の関数である．(f は状態の波動関数と呼ばれる.)

この状態を，粒子番号の入れ替えに関して対称な $g(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) = \{f(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) + f(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1)\}/2$ を用いて，

$$|\,\text{状態}\,\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} g(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\, a^\dagger_{\mathbf{k}_1} a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|0\rangle$$

のようにも書けることを示せ.

8.2 フェルミオンの 2 粒子状態は，一般に，

$$|\,\text{状態}\,\rangle = \sum_{\mathbf{p}_1,\varepsilon_1,\mathbf{p}_2,\varepsilon_2} f(\mathbf{p}_1,\varepsilon_1;\mathbf{p}_2,\varepsilon_2)\, b^\dagger_{\mathbf{p}_1\varepsilon_1} b^\dagger_{\mathbf{p}_2\varepsilon_2}|0\rangle$$

と書ける．規格化条件を除けば，f は $\mathbf{p}_1,\varepsilon_1,\mathbf{p}_2,\varepsilon_2$ の任意の関数である.

この状態を，粒子番号の入れ替えに関して反対称な $g(\mathbf{p}_1,\varepsilon_1;\mathbf{p}_2,\varepsilon_2) = \{f(\mathbf{p}_1,\varepsilon_1;\mathbf{p}_2,\varepsilon_2) - f(\mathbf{p}_2,\varepsilon_2;\mathbf{p}_1,\varepsilon_1)\}/2$ を用いて，

$$|\,\text{状態}\,\rangle = \sum_{\mathbf{p}_1,\varepsilon_1,\mathbf{p}_2,\varepsilon_2} g(\mathbf{p}_1,\varepsilon_1;\mathbf{p}_2,\varepsilon_2)\, b^\dagger_{\mathbf{p}_1\varepsilon_1} b^\dagger_{\mathbf{p}_2\varepsilon_2}|0\rangle$$

のようにも書けることを示せ.

***8.3** エネルギーと運動量の保存則を用いて，自由空間内ではひとつの光子 (γ) からの電子-陽電子対生成 $\gamma \to \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$ が不可能であることを示せ.

8.4 電磁場のエネルギー密度は式 (4.24) によって与えられる．電荷 q を持つ点粒

子の，粒子位置を中心とする半径 R の球の外側の全電場エネルギーは，

$$[\text{エネルギー}] = q^2/(8\pi R)$$

であることを示せ．粒子の静止エネルギーに対する上記の古典的な寄与は，$R \to 0$ の極限で無限大になることに注意せよ．

第 **9** 章

弱い相互作用：低エネルギー現象論

本章では，弱い相互作用 (weak interaction) に関する初期の現象論を見てみる．その知見は標準模型の構築のための重要な手掛りになった．

9.1　原子核の β 崩壊

原子核物理の初期の研究で，すでに β 崩壊を引き起こす“弱い相互作用”の存在が認識されていた．次のような崩壊，

$$
\begin{aligned}
{}^{17}_{9}\mathrm{F} &\to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}} \\
\mathrm{n} &\to \mathrm{p} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

に関する平均寿命は非常に長いので，崩壊に関与する相互作用は極めて弱いものと見なされた．原子核の電磁的な崩壊に関する平均寿命が $\sim 10^{-15}$ s であるのに比べて，上記のような崩壊の寿命は数分にも及んでいる．

原子核物理学者たちは，注意深い巧妙な実験によって，弱い相互作用の主要な特徴と電子ニュートリノ ν_{e} の性質を明らかにした．電荷保存の要請から，ニュートリノは電気的に中性でなければならない．またニュートリノをスピン $\frac{1}{2}$ の Dirac フェルミオンと仮定すれば，角運動量保存が成立する．電子ニュートリノが質量を持つとしても，それが極めて小さいことは確実である．

Lee（リー）と Yang（ヤン）の提案を受けて Wu（ウー）が 1957 年に実験的に確認した驚くべき事

実は，弱い相互作用が“パリティを保存しない”(空間反転に関して対称でない) ことである．自然は両利きではない．パリティは最大限に破れており，電子場とニュートリノ場の左手型成分だけが相互作用に与(あずか)る．

この性質は，自然界において“許容されている”β 崩壊から生成する電子の縦偏極を測定することによって明確に示される．速度 v で負のヘリシティ $-\frac{1}{2}$ を持つ電子が左手型の状態にある確率は $\frac{1}{2}\left[1+(v/c)\right]$ であり，正のヘリシティ $+\frac{1}{2}$ を持つ電子が左手型の状態にある確率は $\frac{1}{2}\left[1-(v/c)\right]$ である (問題6.1)．原子核の β 崩壊において，ヘリシティ状態の選択に関して，原子核の方に依存する因子はない．もし電子場の左手型成分だけが相互作用に与るならば，放出される電子の縦偏極度は，

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)=-\frac{v}{c}$$

となるはずである．陽電子に関しては確率が逆転し (問題6.2)，β 崩壊によって放出される陽電子の縦偏極は $+v/c$ となる．このような崩壊における縦偏極のデータを図9.1 に示す．

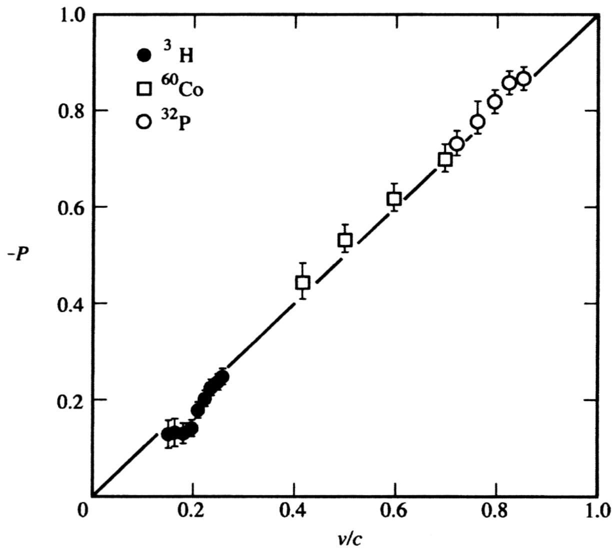


図9.1　β 崩壊で生成した e^- の縦偏極 P の測定結果．(Koks and van Klinken 1976)

β崩壊で放出されたニュートリノのヘリシティを直接測定することはまず不可能だが，崩壊する原子核の角運動量状態を注意深く測定して，そこからニュートリノのヘリシティを推測することはできる．実験誤差の範囲内で，負のヘリシティを持つニュートリノと，正のヘリシティを持つ反ニュートリノが，弱い相互作用に関与していると言える．

原子核のβ崩壊で開放されるエネルギーは，既知の他の世代のレプトンの組合せを生成するためには不充分である．他の組合せとはミュー粒子とミュー・ニュートリノ，およびタウ粒子とタウ・ニュートリノである．第13章において，レプトン族の世代は，おそらくe，μ，τの3世代しかないことを見る予定である．各世代のレプトンは自然界の相互作用において，そっくり同じ役割を果たすように見えるが，これは“レプトンの同格性”(lepton universality)の問題として知られている．ただ世代間で荷電レプトンの質量だけが異なっており$m_e \approx 0.511$ MeV，$m_\mu \approx 106$ MeV，$m_\tau \approx 1777$ MeVである．本書ではすべてのニュートリノが質量を持たないものと仮定するが，実験的には質量の上限が与えられているだけである[§]．

9.2 π中間子の崩壊

レプトン場の左手型成分だけがβ崩壊に関与することと，レプトンの同格性の両方を示す重要な例は，荷電π中間子（メソン）の崩壊現象である．この崩壊は宇宙線物理においてありふれたもので，主にミュー粒子への崩壊が観測される．ほとんど100％の荷電π中間子が，

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

のように崩壊し，その頻度は$1/\tau(\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu) = 2.53 \times 10^{-14}$ MeVである．電子への崩壊頻度は遥かに低く$1/\tau(\pi \to e\bar{\nu}_e) = 1.23 \times 10^{-4}(1/\tau(\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu))$である．

電子への崩壊頻度は，電子とニュートリノそれぞれの左手型の場だけしか相互作用に関与しないために抑制されている．初期状態としてπ^-中間子が静止

---

§ (訳註) p.5, 表1.2 および p.77 訳註参照

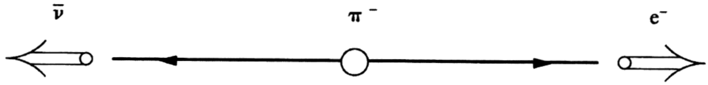


図9.2　$\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ の崩壊．電子の速度を右向きに，反ニュートリノの速度を左向きに取り，それぞれスピンの方向を示した．軌道角運動量の方向は必ず紙面から外れ ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$)，また全角運動量はゼロでなければならないので，それぞれの粒子のスピンは反対向きになる．

している系で，その崩壊を考えよう (図9.2)．π^- のスピンはゼロで，反ニュートリノは正のヘリシティを持つ．したがって，この2体崩壊において角運動量を保存するためには，電子も正のヘリシティを持たなければならない．これが左手型の状態を持つ確率は $\frac{1}{2}\left[1-(v_e/c)\right] = m_e^2/(m_\pi^2+m_e^2) = 1.34\times 10^{-5}$ である (問題9.1)．μ^- への崩壊頻度も同様に決まるが，ミュー粒子の質量が大きいために崩壊を抑制する効果はそれほど働かず，$\frac{1}{2}\left[1-(v_\mu/c)\right] = 0.36$ である．

これらの特徴を取り込んだ，相互作用の実効的なラグランジアン密度を，

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \alpha_\pi \left[j^\mu \partial_\mu \Phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_\pi^\dagger \right] \tag{9.1}$$

と書くことができる．上式が含む“荷電カレント”は，

$$j^\mu = {\rm e}_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\rm eL} + \mu_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mu{\rm L}} + \tau_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\tau{\rm L}} \tag{9.2}$$

と与えられる‡．α_π は有効結合定数 (実数) である．

Φ_π は電荷を持つ $\pi^\pm$ 中間子を記述する複素スカラー場である (7.6節)．Φ_π は π^- 中間子を消滅させ，正の π^+ 中間子を生成する．これは π 中間子の内部構造を無視して導入した現象論的な場なので，標準模型における基本的な

‡ (訳註) j^μ は相互作用に伴い電荷を変えるという点で，電磁相互作用に関わる電磁カレント ($\propto$ [電流密度]) とは異なっているので“荷電カレント”(charged current) もしくは“弱荷電カレント”と呼ばれる．但しこれとは別に，弱い相互作用に関与する電荷を変えないカレントもある．これは“中性カレント”もしくは“弱中性カレント”と呼ばれる (式 (9.16) 参照)．式 (9.2) の中の荷電レプトン場 ${\rm e}_{\rm L}$，$\mu_{\rm L}$，$\tau_{\rm L}$ も数量文字なので，原則的には斜体表記にすべきところであるが，他の変量や定数 (電荷 e，ベクトル成分番号 μ，寿命 τ など) との区別を分かり易くするために，訳稿では例外的に全角の立体表記を採用した．(虚数単位 i，自然対数の底 e は，原書でも立体表記になっている．)

場とは見なされない．4 元ベクトル $e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL}$ は，電子と電子ニュートリノの左手型スピノル場 e_L，ν_{eL} から構築できる最も簡単な Lorentz 不変量である (問題5.3 参照)．レプトンの 3 世代が同じ形で“荷電カレント”j^μ に対する寄与を持っている点で，レプトンの同格性が考慮されている．この荷電カレントの構造は標準模型でも採用される．Lorentz 不変な $\mathcal{L}_{\rm int}$ は j^μ と $\partial_\mu \Phi_\pi$ のスカラー積として得られる．最後に $\mathcal{L}_{\rm int}$ を実数化する．$\mathcal{L}_{\rm int}$ が“点接触”の相互作用を表していることに注意されたい．j^μ と $\partial_\mu \Phi_\pi$ の結合は同じ時空点 x で評価される．π 中間子は拡がりを持つ対象なので，この点接触の相互作用モデルはひとつの近似にすぎず，さほど精密なものではない．

ここで扱う実効的な相互作用ラグランジアンは，低次の摂動だけに用いられるもので，高次補正の計算には適さない．これを用いた計算結果を実験値と比較する場合に，あまり高い精度を期待してはいけない．

$\mathcal{L}_{\rm int}$ を最低次の摂動に適用すると，静止している π 中間子の各崩壊頻度は，次のようになる (問題9.4)．

$$\frac{1}{\tau(\pi \to e\bar{\nu}_e)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1 - \frac{v_e}{c}\right) p_e^2 E_e$$
$$\frac{1}{\tau(\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1 - \frac{v_\mu}{c}\right) p_\mu^2 E_\mu \tag{9.3}$$

E_e，E_μ および p_e，p_μ は*，それぞれ荷電レプトン (e，μ) のエネルギーと運動量を表しており，エネルギー保存則と運動量保存則を満たすことから決まる．$p_e^2 E_e$ や $p_\mu^2 E_\mu$ は，遷移頻度の式における状態密度の因子から生じている (問題9.2)．$(1 - v_e/c)$ や $(1 - v_\mu/c)$ は，左手型の場だけが関与することによる因子である．

崩壊頻度の比は，

$$\frac{\tau(\pi \to \mu\bar{\nu}_\mu)}{\tau(\pi \to e\bar{\nu}_e)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.28 \times 10^{-4} \tag{9.4}$$

---

* (訳註) 関連文献を読む際の注意：運動量の p という表記には 3 次元運動量ベクトルの大きさ $|\mathbf{p}|$ (“普通の”運動量) を意味する場合と，4 元運動量ベクトル p^μ を意味する場合があり，読者は前後関係から常にこの判断をしなければならない．ここでは前者なので $p^2 = \mathbf{p}^2$ だが，後者の場合，p^2 という表記は慣用的に $p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2$ という意味で用いられる．k や q などにも同様の注意が必要である．

と与えられる (問題9.3)．非局所性と電磁過程による補正を無視した最低次の計算であるが，実験値 1.23×10^{-4} に非常に近く，レプトンの同格性を強く支持する結果となっている．

実験によると $1/\tau(\pi\to e\bar{\nu}_e)=3.11\times10^{-18}$ MeV，$1/\tau(\pi\to\mu\bar{\nu}_\mu)=2.53\times10^{-14}$ MeV であり，これらの値から，

$$\alpha_\pi=2.09\times10^{-9}\ \mathrm{MeV}^{-1}$$

と見積もられる．相互作用の弱さを反映して α_π の値は小さい．

π 中間子はタウ粒子へと崩壊するための充分な質量を持っていないが，実効的ラグランジアン (9.1) は，逆のタウ粒子崩壊，

$$\tau^+\to\pi^++\bar{\nu}_\tau,\quad \tau^-\to\pi^-+\nu_\tau$$

も記述しており，崩壊頻度は最低次の摂動で，

$$\frac{1}{\tau(\tau\to\pi\nu_\tau)}=\frac{\alpha_\pi^2}{32\pi}m_\tau^3\left[1-(m_\pi/m_\tau)^2\right]^2 \tag{9.5}$$

と与えられる．$\pi^\pm$ 中間子の崩壊によって推定した α_π の値から $1/\tau(\tau\to\pi\nu_\tau)$ を計算して実験値と比較してみると，更にレプトンの同格性の正否を確認できる．算出される値は 2.42×10^{-10} MeV であり，実験値 $(2.6\pm0.1)\times10^{-10}$ MeV に充分近い．

9.3　レプトン数の保存

標準模型では原則として，単一のレプトンは同世代のレプトンだけに変わることができ，レプトンの生成や消滅は，同世代のレプトンと反レプトンの組合せでしか起こらない．このように，それぞれの世代に関して “レプトン数の保存則” (反レプトンは負に数える) が成立する．ここまで見てきた崩壊の例は，この保存則の実例となっている．

7.1節において，粒子の保存則は，ラグランジアンが持つ $U(1)$ 対称性の帰結であることを見た．ここでモデルラグランジアンから，どのようにレプトン数の保存が導かれるかが興味深い問題となる．ラグランジアン全体は，

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{free}}+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$$

と書かれる．レプトン場の Dirac スピノルを用いると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \partial_\mu \Phi_\pi^\dagger \partial^\mu \Phi_\pi - m_\pi^2 \Phi_\pi^\dagger \Phi_\pi \\ &\quad + \bar{\psi}_{\text{e}}(\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu - m_{\text{e}})\psi_{\text{e}} + \bar{\nu}_{\text{e}}\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_{\text{e}} \\ &\quad + \bar{\psi}_\mu(\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu - m_\mu)\psi_\mu + \bar{\nu}_\mu\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\mu \\ &\quad + \bar{\psi}_\tau(\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu - m_\tau)\psi_\tau + \bar{\nu}_\tau\gamma^\mu \text{i}\partial_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\tau \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \alpha_\pi \left[j^\mu \partial_\mu \Phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_\pi^\dagger \right]\end{aligned}$$

であり，式 (9.2) の荷電カレント j^μ も Dirac スピノルを用いて書くと次のようになる．

$$j^\mu = \bar{\psi}_{\text{e}}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_{\text{e}} + \bar{\psi}_\mu\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\mu + \bar{\psi}_\tau\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\tau \tag{9.6}$$

$\mathcal{L}_{\text{free}}$ は 7 つの $U(1)$ 対称性を持っている．すなわち 7 つの自由場が独立な位相を持ち得る．$\mathcal{L}_{\text{int}}$ を導入すると，これらの独立な位相の自由度は，以下のように 4 つに減じる．

$$\begin{aligned}&\psi_{\text{e}} \to \text{e}^{\text{i}\beta}\text{e}^{\text{i}\alpha_{\text{e}}}\psi_{\text{e}}, \qquad \nu_{\text{e}} \to \text{e}^{\text{i}\alpha_{\text{e}}}\nu_{\text{e}}; \\ &\psi_\mu \to \text{e}^{\text{i}\beta}\text{e}^{\text{i}\alpha_\mu}\psi_\mu, \qquad \nu_\mu \to \text{e}^{\text{i}\alpha_\mu}\nu_\mu; \\ &\psi_\tau \to \text{e}^{\text{i}\beta}\text{e}^{\text{i}\alpha_\tau}\psi_\tau, \qquad \nu_\tau \to \text{e}^{\text{i}\alpha_\tau}\nu_\tau; \\ &\Phi_\pi \to \text{e}^{\text{i}\beta}\Phi_\pi\end{aligned} \tag{9.7}$$

位相因子 α_{e}，α_μ，α_τ は保存するレプトンカレントに関係する (問題9.6)．ここで $\beta = \beta(x)$ と置いた“局所的ゲージ変換”の下でも $\mathcal{L}$ が不変であることを要請するならば，5.5節と同様に電磁場 A^μ の導入が必要になる．このような実効的ラグランジアンの特徴は，標準模型のラグランジアンにも継承される．

9.4 ミュー粒子の崩壊

ミュー粒子の崩壊，

$$\mu^- \to \text{e}^- + \bar{\nu}_{\text{e}} + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to \text{e}^+ + \nu_{\text{e}} + \bar{\nu}_\mu$$

の解析は，標準模型を確立する上で非常に重要な役割を果たした．この崩壊

はレプトン場だけを含み，先に見た π 中間子の崩壊とは違って，強い相互作用をする場が混在することによる曖昧さがない．

ミュー粒子の崩壊を記述する実効的ラグランジアンは，やはり関与する粒子を荷電カレントの形で結合させる．実際にレプトンだけを含むすべての崩壊は，次の実効的ラグランジアン密度によって，非常に良く記述できる．

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}} = -2\sqrt{2}G_{\text{F}}g_{\mu\nu}j^{\mu}j^{\nu\dagger} \tag{9.8}$$

荷電カレント j^{μ} は式 (9.2) もしくは式 (9.6) で定義される．同じ形の式が，β 崩壊を扱う意図で Fermi によって導入された経緯のために，G_{F} は Fermi 定数と呼ばれている．歴史的な偶然の事情から，ここに $2\sqrt{2}$ という因子が付いている．

式 (9.8) に含まれる μ^- の崩壊を表す項は，

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{2}G_{\text{F}}g_{\mu\nu}\left[\text{e}_{\text{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\text{eL}}\nu_{\mu\text{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}\mu_{\text{L}}\right] \tag{9.9}$$

である．最もよく利用されるミュー粒子の供給源は π 中間子の崩壊であり，すでに見たように，この崩壊で生じるミュー粒子はほぼ 100 %偏極している．相互作用ラグランジアン密度 (9.9) は，電子の方向とミュー粒子スピンの相対角度 θ と，電子のエネルギー E_{e} の間に強い相関があることを意味する．ミュー粒子が静止している系で見て，最低次の摂動において $(m_{\text{e}}/m_{\mu})^2$ の項を省くと，角度範囲 $\text{d}\theta$，エネルギー範囲 $\text{d}E_{\text{e}}$ への崩壊頻度は，次のように与えられる (Donoghue *et al.* 1992, p.138 参照)．

$$R(\theta, E_{\text{e}})\text{d}\theta\text{d}E_{\text{e}} = \frac{m_{\mu}G_{\text{F}}^2}{6\pi^3}\left[\left(\frac{3}{2}E_{\text{max}} - E_{\text{e}}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{2}E_{\text{max}} - E_{\text{e}}\right)\right] \times E_{\text{e}}^2\text{d}E_{\text{e}}\sin\theta\text{d}\theta \tag{9.10}$$

式 (9.10) を θ と E_{e} に関して積分すると，全崩壊頻度は，

$$\frac{1}{\tau(\mu \to \text{e}\bar{\nu}_{\text{e}}\nu_{\mu})} = \frac{m_{\mu}^5 G_{\text{F}}^2}{192\pi^3} \tag{9.11}$$

となる．終状態が光子も含むような，たとえば，

$$\mu^- \to \text{e}^- + \gamma + \bar{\nu}_{\text{e}} + \nu_{\mu}$$

などの過程も含むミュー粒子の全崩壊頻度は正確に測定されており，その数

値は，

$$\tau_\mu = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

である．この値を，式 (9.11) に $(m_\mathrm{e}/m_\mu)^2$ の項や電磁的な効果を含めた正確な理論式と比較すると，次の Fermi 定数値が得られる．

$$G_\mathrm{F} = 1.16639(2) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{9.12}$$

現在のところ，これが Fermi 定数の値として受け入れられている．

さらにレプトンの同格性をテストするために，次の崩壊，

$$\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \quad \tau^- \to \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \nu_\tau$$

と，これらの荷電共役を調べてみる．ミュー粒子の崩壊と同様に，これらも相互作用ラグランジアン (9.8) の中の項によって記述される．$(m_\mathrm{e}/m_\tau)^2$ と $(m_\mu/m_\tau)^2$ は両方とも小さいので，これらの崩壊頻度に関しては，1 次摂動の式 (9.11) において m_μ を m_τ に置き換えればよく，どちらもおおよそ $\approx 4 \times 10^{-10}$ MeV と予言される．実際の数値も実験誤差の範囲内でこの値になっている．また，この式から，

$$\frac{\tau(\tau \to \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\tau)}{\tau(\mu \to \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\mu)} \quad \text{は，} \quad \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 \quad \text{と等しくなければならない．}$$

実際の崩壊頻度の比は 7.36×10^{-7} であり，質量比の 5 乗は 7.43×10^{-7} である．

9.5　ミュー・ニュートリノと電子の相互作用

1960 年代に Brookhaven（ブルックヘヴン）国立研究所と CERN（セルン）において，人工的にミュー・ニュートリノの強いビームが作られるようになった．ミュー・ニュートリノ (とその反ニュートリノ) は，移動する π^+(もしくは π^-) 中間子の崩壊に伴う 2 次粒子として生成される．このニュートリノのビームを標的 (target) と相互作用させると，電子ではなく，ほぼすべてミュー粒子を生成するという事実から，電子ニュートリノとミュー・ニュートリノの区別が確立した．

電子の質量が小さいために，静止している電子にニュートリノを衝突させ

る際の重心系エネルギー $\sqrt{s}$ は比較的小さい．ニュートリノのエネルギーを E_ν とすると，

$$s = m_\mathrm{e}(2E_\nu + m_\mathrm{e}) \tag{9.13}$$

である (問題9.8)．たとえば $E_\nu = 30$ GeV であれば $s = (175\ \mathrm{MeV})^2$ であり，ミュー粒子しか生成できない．大抵のニュートリノ実験では，第14章で見るように，ニュートリノを標的中の原子核と相互作用させる．しかしここでは電子との相互作用だけを考察する．

実効的な相互作用ラグランジアン密度 (9.8) には，

$$\nu_\mu + \mathrm{e}^- \to \mu^- + \nu_\mathrm{e}$$

という相互作用が含まれている．1次摂動までを考え，電子の偏極の平均をとると，重心系における等方的な微分断面積[§]と断面積が，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{G_\mathrm{F}^2}{4\pi^2}\frac{(s - m_\mu^2)^2}{s}, \quad \sigma_\mathrm{tot} = \frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}\frac{(s - m_\mu^2)^2}{s} \tag{9.14}$$

§ (訳註) 初期状態が2粒子 i1 と i2，終状態が2粒子 f1 と f2 を含む散乱過程を想定して微分断面積の導出方法の概要を紹介しておく．粒子 f1 を検出する微分断面積を求める際には，p.17 訳註で与えた断面積の定義式において終状態数 dN を考慮して ($\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}N\cdot\Gamma_\mathrm{f\,i}$)，

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}N\frac{V\Gamma_\mathrm{f\,i}}{v_\mathrm{rel}} = \iiint_{\mathbf{p}_\mathrm{f2}} \frac{V\mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f1}}{(2\pi)^3\hbar^3}\frac{V\mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f2}}{(2\pi)^3\hbar^3}\frac{V\Gamma_\mathrm{f\,i}}{v_\mathrm{rel}}$$

と置く．$\Gamma_\mathrm{f\,i}$ には，ひとつの終状態を想定した遷移頻度の式 ($\delta^4(P_\mathrm{f} - P_\mathrm{i})$ を含む．${P_\mathrm{f}}^\mu = {p_\mathrm{f1}}^\mu + {p_\mathrm{f2}}^\mu$，${P_\mathrm{i}}^\mu = {p_\mathrm{i1}}^\mu + {p_\mathrm{i2}}^\mu$．p.108 訳註参照) を充てる ($s = P_{\mathrm{i}\mu}{P_\mathrm{i}}^\mu$)．$v_\mathrm{rel}$ は，

$$E_\mathrm{i1}E_\mathrm{i2}v_\mathrm{rel} = \sqrt{(p_\mathrm{i1}p_\mathrm{i2})^2 - m_\mathrm{i1}^2 m_\mathrm{i2}^2} \qquad (p_\mathrm{i1}p_\mathrm{i2} = p_{\mathrm{i1}\mu}{p_\mathrm{i2}}^\mu)$$

を満たす．p_f2 の3次元積分は，

$$\iiint_{\mathbf{p}_\mathrm{f2}} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f1}\mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f2}\delta^4(P_\mathrm{f} - P_\mathrm{i}) = \mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f1}\delta(E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i})\Big|_{\mathbf{P}_\mathrm{f} - \mathbf{P}_\mathrm{i} = 0}$$

となる ($E_\mathrm{f} = E_\mathrm{f1} + E_\mathrm{f2}$，$E_\mathrm{i} = E_\mathrm{i1} + E_\mathrm{i2}$)．立体角 d$\Omega$ ($= \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$) を導入するために，

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbf{p}_\mathrm{f1}} \mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f1}\delta(E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i}) &= \int_{p_\mathrm{f1}}\int_\Omega p_\mathrm{f1}^2\mathrm{d}p_\mathrm{f1}\mathrm{d}\Omega\delta(E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i}) \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}\Omega\frac{p_\mathrm{f1}^2}{\partial(E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i})/\partial p_\mathrm{f1}}\Big|_{E_\mathrm{f} - E_\mathrm{i} = 0}\end{aligned}$$

という関係 (一般に $\int\mathrm{d}x f(x)\delta(g(x)) = f(x)/(\mathrm{d}g/\mathrm{d}x)\big|_{g(x)=0}$である) を用いる．この式は積分記号を省いて，$\mathrm{d}^3\mathbf{p}_\mathrm{f1}$ から dΩ への微分の変換関係の式として捉えればよい．

と与えられる．s は重心系エネルギーの自乗である (Okun 1982, p.134 参照).

実験が可能な低エネルギー領域において，実際の断面積は上記の理論式と合っているように見える．高エネルギーの構造は，式 (9.13) から分かるように実験による確認は難しいが，上記の式が高エネルギー領域で不適切になることも自明である．s の増加に伴って式 (9.14) は際限なく増加してしまうので，"点接触 (カレント・カレント型) 相互作用" はユニタリー性と矛盾している．実効的ラグランジアンは繰り込み可能な理論を与えないので，この枠組みの中で式を改善することも不可能である．

ニュートリノと電子の相互作用実験から得られる最も重要な結果は，ν_μ と $\bar{\nu}_\mu$ 両方に関する弾性散乱であろう．

$$\nu_\mu + \mathrm{e}^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^-$$

これらの散乱断面積は，ミュー粒子生成の断面積と同程度である．このような弾性散乱は $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ に含まれて "いない" ($\mathrm{e}\nu_\mathrm{e} \to \mathrm{e}\nu_\mathrm{e}$ や $\mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}$ に対応する項はあるが)．したがって式 (9.8) とは別の弱い相互作用が存在しなければならない．しかし実験可能なエネルギー領域では断面積が小さいために，これに関する実験的な研究は困難である．我々は後の章で標準模型から，やはり実効的な相互作用ラグランジアン密度が，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} (j_{\mathrm{neutral}})_\mu (j_{\mathrm{neutral}})^\mu \tag{9.15}$$

のようなカレント・カレント型で表され，このカレントは Dirac スピノルを用いて，

$$\begin{aligned}(j_{\mathrm{neutral}})^\mu = \bar{\nu}_\mathrm{e} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\mathrm{e} + \bar{\psi}_\mathrm{e}\gamma^\mu(c_\mathrm{V} - c_\mathrm{A}\gamma^5)\psi_\mathrm{e} \\ + [\mu \text{ と } \tau \text{ に関する同様の項}]\end{aligned} \tag{9.16}$$

と与えられることを見る．c_V と c_A はパラメーターである．これは式 (9.2) の荷電カレントとは違って電荷を変化させないので "中性カレント" (neutral current) と呼ばれる (これが $\mathrm{e}\nu_\mathrm{e} \to \mathrm{e}\nu_\mathrm{e}$ の散乱にも寄与を持つことに注意せよ．)

式 (9.16) を 2 成分スピノルを用いて書き直すと，次のようになる．

$$(j_{\rm neutral})^\mu = (\nu_{\rm eL})^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\rm eL} + (c_{\rm V} + c_{\rm A}) {\rm e}_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu {\rm e}_{\rm L} + (c_{\rm V} - c_{\rm A}) {\rm e}_{\rm R}^\dagger \sigma^\mu {\rm e}_{\rm R} + [\mu \text{ と } \tau \text{ に関する同様の項}] \tag{9.17}$$

この式を見ると，中性カレントには左手型だけでなく右手型のレプトン場も含まれている．2 つのパラメーター $c_{\rm V}$ と $c_{\rm A}$ は標準模型に現れる Weinberg（ワインバーグ）角 $\theta_{\rm W}$ に関係しているが，これについては第 12 章で述べる (式 (12.24))．添字の V と A は，それぞれベクトルおよび軸性ベクトルを意味している (5.5 節参照)．

ここで原子物理においても中性カレントの効果を予想したくなるし，実際に中性カレントは存在している．しかしその効果を実験で確認することは難しい．たとえば中性カレントは，原子においてパリティの破れを引き起こすはずであるが，原子の持つエネルギー領域では，弱い相互作用は非常に小さな効果しか持たない．中性カレントによる原子核系や原子系の崩壊は，常にそれよりも速い電磁的な崩壊と競合関係にあるために，これらの系で中性カレントによる崩壊が観測されることはない．

練習問題　(＊解法とヒント p.293)

*9.1　静止している π^- 中間子の崩壊 $\pi^- \to {\rm e}^- + \bar{\nu}_{\rm e}$ に関して，次式を示せ．

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v_{\rm e}}{c}\right) = \frac{m_{\rm e}^2}{m_\pi^2 + m_{\rm e}^2}$$

*9.2　問題 9.1 の崩壊における終状態の状態密度は，

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p_{\rm e}^2 \frac{{\rm d}p_{\rm e}}{{\rm d}E}$$

と与えられる．V は規格化体積である．ここで，

$$\frac{{\rm d}p_{\rm e}}{{\rm d}E} = \frac{E_{\rm e}}{m_\pi}$$

となることを示せ．

*9.3　崩壊頻度の比の式 (9.4) を導出せよ．

*9.4　$\mathcal{L}_{\rm int}$ の中で崩壊 $\pi^- \to {\rm e}^- + \bar{\nu}_{\rm e}$ を表す項は，

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \alpha_\pi {\rm e}_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\rm eL} \partial_\mu \Phi_\pi$$

である．これに対応する実効的ハミルトニアンの項 $V(0)$ が，

$$V(0) = -\alpha_\pi \int e_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{eL} \partial_\mu \Phi_\pi d^3\mathbf{x}$$

となると仮定せよ (この仮定は第 12 章で正当化される).

この崩壊の頻度 (単位時間あたりの崩壊確率) は，最低次の摂動で，

$$2\pi \left| \langle e_p \bar{\nu}_{p'} | V(0) | \pi^- (\text{静止}) \rangle \right|^2 \rho(E)$$

となる．$\rho(E)$ は問題9.2 で得た状態密度である‡.

式 (3.35) と式 (6.24) および問題6.5 (p.87) の自由場展開を用いて上記の行列要素を評価し，式 (9.3) を証明せよ．

9.5 荷電カレント j^μ を表す式 (9.2) と式 (9.6) が等価であることを示せ．

9.6 9.3節の実効的ラグランジアンを採用して，$U(1)$ 対称性 $\psi_e \to e^{i\alpha}\psi_e$，$\nu_e \to e^{i\alpha}\nu_e$ によって保存するカレントは，次式のような電子と電子ニュートリノのカレントであることを示せ．

$$J^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e + \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_e$$

また，式 (9.7) の $e^{i\beta}$ による変換の下で保存するカレントは，

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e + \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \psi_\mu + \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\tau \\ &\quad + i\left[(\Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger) + \alpha_\pi (j^{\mu\dagger}\Phi^\dagger - j^\mu \Phi)\right]\end{aligned}$$

と表されることを示せ．

位相因子 $e^{i\beta}$ による大域的$U(1)$対称性を局所的ゲージ対称性に変更し，その際に導入される電磁場も含めたラグランジアン密度を構築せよ．

***9.7** 式 (9.11) と寿命 τ_μ の実験値から G_F の値を推定せよ．

***9.8** 適当な Lorentz不変量を用いて，式 (9.13) を導出せよ．

***9.9** 実効的ラグランジアン密度 (9.8) から，

$$e^- + \nu_e \to e^- + \nu_e$$

の散乱に寄与する項を抜き出せ．同様に式 (9.15) から，

$$e^- + \nu_\mu \to e^- + \nu_\mu$$

の散乱に寄与する項を抜き出せ．

***9.10** K^- は π^- と同様の中間子だが，d クォークの代わりに s クォークを含む．レプトンとの実効的な相互作用は式 (9.1) と同じ形を持ち，Φ_π を Φ_K に，α_π を α_K に置き換えた式で表される．式 (9.4) からの類推により，崩壊頻度の比

‡ (訳註) 遷移頻度に関しては p.108 参照．自然単位系なので $(1/\hbar)$ が省略されている．また問題9.2 の状態密度の式では $(1/\hbar)^3$ が省略されている．

$\tau(\mathrm{K} \to \mu\bar{\nu}_\mu)/\tau(\mathrm{K} \to \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e})$ を推定し，実験値 $(2.44 \pm 0.1) \times 10^{-5}$ と比較せよ $(m_\mathrm{K} = 493.68\ \mathrm{MeV})$.

実験から平均寿命 $\tau(\mathrm{K}^- \to \mu^-\bar{\nu}_\mu)$ が 1.948×10^{-8} s と与えられている．$\alpha_\mathrm{K}/\alpha_\pi$ の値を求めよ．

*9.11 崩壊頻度の式 (9.5) を導出せよ．

第 10 章

自発的な対称性の破れ

第 9 章では，弱い相互作用に関する“実効的な”ラグランジアン密度をいくつか構築してみた．これらは低次摂動の範囲で，低エネルギー領域における実験事実をよく再現する．しかし高次の摂動では量子電磁力学と同様に困難が現れる．ただし量子電磁力学の場合と本質的に違う点は，これらの実効的ラグランジアンを用いた理論が繰り込み可能でないということである．従って理論としては全く不満足なものであり，さらに高エネルギーでは実効的ラグランジアンで記述できない新たな現象も見られる．現在では W^+，W^-，Z という 3 種類のボゾンの媒介によって弱い相互作用が生じていることも実験的に確認されている．これらの粒子はどのように弱い相互作用の理論に組み込まれるのか？　そして QED と同等の必然性を持つ繰り込み可能な理論はどのように構築されるのか？　この問題の回答は電弱相互作用を統一した Weinberg-Salam（ワインバーグ サラム）の理論によって与えられる．本章では Weinberg-Salam 理論そのものに取り組む前の準備として，数学的に極めて単純だが，この理論の構築のために不可欠な基本概念を含む“モデル”を考察する．

10.1　大域的な対称性の破れと Goldstone ボゾン

複素スカラー場 $\Phi = (\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$ のラグランジアン密度は，次のように書ける (式 (3.32) 参照).

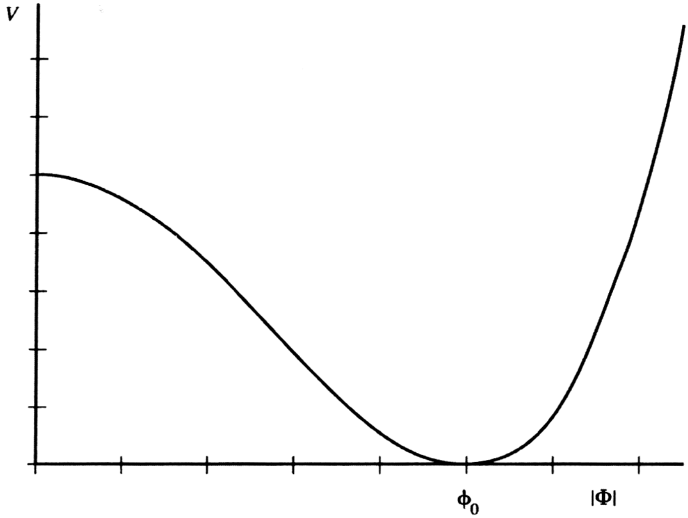


図10.1 $V = (m^2/2\phi_0^2)[\Phi^*\Phi - \phi_0^2]^2$ を $|\Phi|$ の関数として描いた図．Φ はここでは古典的な場である．

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{10.1}$$

この式において運動エネルギー密度は $(\partial\Phi^\dagger/\partial t)(\partial\Phi/\partial t)$，ポテンシャルエネルギー密度は $\nabla\Phi^\dagger\cdot\nabla\Phi + m^2\Phi^\dagger\Phi$ と見なせる (3.3節参照)．Φ が時空座標によらない定数であれば，エネルギーへの寄与は $m^2\Phi^\dagger\Phi$ だけである．m^2 が正なので，これは $\phi_1 = \phi_2 = 0$ のときに最小となる．したがって $\Phi = 0$ が“真空”状態に対応する．ここで改めて，m^2 の前の符号を変えたラグランジアン密度を考えてみよう．このような系は不安定でポテンシャルの下限がない．安定性を回復するためには，もうひとつの (実数の) パラメーター ϕ_0^2 を導入して $(m^2/2\phi_0^2)(\Phi^\dagger\Phi)^2$ という項を加えればよい．議論を簡単にするために定数 $m^2\phi_0^2/2$ も同時に加えると，ラグランジアン密度は次のようになる．

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)$$
$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2 \tag{10.2}$$

V の概形を図10.1 に示してある．時空座標に依存せず $\Phi^\dagger\Phi = |\Phi|^2 = \phi_0^2$ を満たす定数の場 Φ によって，最低エネルギー状態が得られる．エネルギー

を最低にする場の状態は一意的ではなく，(ϕ_1, ϕ_2)空間において $|\Phi| = \phi_0$ の円周上の点が全て最低エネルギー状態にあたるので，この“Higgs場（ヒッグズ）”の真空状態として想定しうる状態は無数にある§.

ここで，磁気学からの類推が理解の助けになる．強磁性体を記述するHeisenberg模型のハミルトニアンは，相互作用に関して回転対称性を持っており，空間内のあらゆる方向が磁化に関して等価である．しかし強磁性体の実際の基底状態は，特定の方向に磁化している状態であり，この方向は理論的には決まらない．磁化に伴って回転対称性が失われている．これは“自発的な対称性の破れ”(spontaneous symmetry breaking) の一例である．

ラグランジアン密度 (10.2) は“大域的な”$U(1)$ 対称性を持っており，任意の実数 α に関する $\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\Phi$ という変換の下で，$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ のように不変である．位相変換を実部と虚部に対する等価な表現に直すと，

$$\phi_1' = \phi_1 \cos\alpha + \phi_2 \sin\alpha$$
$$\phi_2' = -\phi_1 \sin\alpha + \phi_2 \cos\alpha$$

である．(ϕ_1, ϕ_2)空間において系の状態を表す点は，変換によって，$|\Phi|^2 =$ [定数] の円周上を回転する．(ϕ_1, ϕ_2)空間の中で，たとえば Φ が実数となる方向を選んで基底状態を $(\phi_0, 0)$ と置くときに，その基底状態は $U(1)$ 対称性を破っている．

基底状態 $(\phi_0, 0)$ を基点とした展開を考えるために $\Phi = \phi_0 + (1/\sqrt{2})(\chi + \mathrm{i}\psi)$ と置く．ラグランジアン密度は次のようになる．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right]^2 \tag{10.3}$$

我々はこのように，まず $U(1)$ 対称性を破っておいて，そこから新たに定義した場の挙動を理解しなければならない (強磁性体を扱う場合も同様で，まず空間内の対称性を破らないと励起状態の議論ができない)．ここでは複素場 Φ の代わりに，互いに結合している 2 つの実スカラー場 χ と ψ を扱うことになる．ラグランジアンを次のように書き直す．

---

§ (訳註) この (ϕ_1, ϕ_2)面の上で考えたポテンシャル V の“形”は「メキシコ帽子」や「ワイン瓶の底」と形容されることが多い．図10.1 の曲線の回転体をイメージすること．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$
$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi \tag{10.4}$$

$\mathcal{L}_{\text{free}}$ は自由粒子の場を表し，$\mathcal{L}$ の中の場に関する 2 次の項をすべて含む．古典場の小さな振動だけを扱う場合には，これらの項が支配的な役割を持つ．ラグランジアン密度の残りの部分 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ は，自由粒子間の相互作用と，粒子の運動に対する高次補正を表す．

式 (10.4) には $-m^2\chi^2$ という項があるので，χ-場は質量 $\sqrt{2}m$，スピン 0 のスカラー粒子に対応する (式 (3.18) との比較による)．ψ-場に関しては，このような 2 次の質量項がないので，これに対応するスピン 0 のスカラー粒子は質量を持たない．自発的に大域的な対称性を破っている系には，必ずこのように質量を持たない粒子が生じることが分かっており，これを“Goldstone（ゴールドストーン）ボゾン”と呼ぶ．

10.2　局所的な対称性の破れと Higgs ボゾン

前節の議論を一般化して，次の“局所的な”$U(1)$ ゲージ変換の下で不変なラグランジアンの構築を考える．

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\Phi$$

ここでの変換位相 $\theta = \theta(x)$ は，時空座標に依存する関数である．この変換の下でラグランジアンを不変に保てるようにするには，7.6 節と同様に，ラグランジアンに (質量を持たない) ゲージ場 A_μ を導入しなければならない．

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)\Phi^\dagger\right]\left[(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu)\Phi\right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger\Phi) \tag{10.5}$$

前と同様に $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり，またここでも，

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2\right]^2$$

と置く．$\mathcal{L}$ は次の局所的ゲージ変換の下で不変である．

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\Phi(x), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

場のエネルギーは，A_μ がゼロで，Φ が $|\Phi| = \phi_0$ の円周上の点で表される

定数のときに最低になる．これらの場に任意のゲージ変換を施しても，最低エネルギーの状態が保たれる．この場合も許容される真空状態は無数にある．

与えられた真空状態の $\Phi(x)$ に対して，必ず $\Phi'(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\Phi(x)$ を実数にするように $\theta(x)$ を選ぶことができる．状態は対称性を破っており，このような変換は一意的である．

ここで $\Phi'(x)=\phi_0+h(x)/\sqrt{2}$ と置く．$h(x)$ は実数である．ラグランジアン密度は次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\left[(\partial_\mu-\mathrm{i}qA'_\mu)(\phi_0+h/\sqrt{2})\right]\left[(\partial^\mu+\mathrm{i}qA'^\mu)(\phi_0+h/\sqrt{2})\right]\\&-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0h+\frac{1}{2}h^2\right]^2\end{aligned}\tag{10.6}$$

ここでも議論の見通しをよくするために，ラグランジアンを分割する．

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mathrm{free}}+\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$$

ラグランジアンの各部は次のように書かれる (ゲージ場に付くプライム記号は省く)．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{free}}&=\frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h-m^2h^2-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+q^2\phi_0^2A_\mu A^\mu\\\mathcal{L}_{\mathrm{int}}&=q^2A_\mu A^\mu\left(\sqrt{2}\phi_0h+\frac{1}{2}h^2\right)-\frac{m^2h^2}{2\phi_0^2}\left(\sqrt{2}\phi_0h+\frac{1}{4}h^2\right)\end{aligned}\tag{10.7}$$

対称性を破る前には，我々は複素スカラー場 $\Phi=(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$ と，2つの偏極状態を持つ質量のないベクトル場を得た (4.4節)．上記の $\mathcal{L}_{\mathrm{free}}$ では質量 $\sqrt{2}m$，スピン0のボゾン (Higgsボゾン) を表すHiggs実スカラー場 $h(x)$ と，質量 $\sqrt{2}q\phi_0$ のベクトルボゾンを表す3つの独立成分を持ったベクトル場 A_μ が得られている (4.9節)．

このようにして質量を導入する機構はHiggs (1964) や，その他の人々(たとえばAnderson 1963) によって発明されたもので，場 $h(x)$ に対応する粒子は“Higgsボゾン”と呼ばれている．局所的な対称性の破れの結果として，ゲージ場は質量を獲得し，10.1節に示したような大域的な対称性の破れの下で現れるはずの，質量がないスピン0のGoldstoneボゾンは，質量を持つス

ピン 1 のボゾンの縦偏極状態に置き換わる§.

Weinberg-Salam の"電弱"理論では，$W^{\pm}$ ボゾンと Z ボゾンの質量が，対称性の破れの結果として与えられている．第 9 章で紹介した現象論は繰り込み不可能であったが，このようにして得られる電弱理論は繰り込み可能である．本章で導入した $V(\Phi^\dagger\Phi)$ の形は電弱理論の中にも現れる．このポテンシャルには任意性を感じる向きもあるかもしれないが，実はこれが，理論を繰り込み可能にする最も一般的な形であることを証明できる．

練習問題　(＊解法とヒント p.295)

***10.1** モデルラグランジアン密度 (10.3) の中で，質量を持つボゾンを 2 つの Goldstone ボゾンに崩壊させるのは，どのような相互作用項か？　最低次の摂動により崩壊頻度が，

$$\frac{1}{\tau(\chi \to \psi\psi)} = \frac{m_\chi}{128\pi}\left(\frac{m_\chi}{\phi_0}\right)^2$$

と与えられることを示せ．

***10.2** モデルラグランジアン密度 (10.7) を用いて，ベクトルボゾンは安定だが，結合定数が $q < m/(2\phi_0)$ であれば，スカラーボゾンは 2 つのベクトルボゾンに崩壊することを示せ．

§ (訳註) A. Salam はこのことを「質量ゼロのゲージ場が Goldstone ボゾンを"食べて"質量を獲得する」と表現した．

第 **11** 章

電弱ゲージ場

前章では Lorentz 不変性を持つ簡単なラグランジアン密度の式を作り，このラグランジアン密度が局所的な $U(1)$ 変換の下でも不変であることを要請して，これを実現するために“ゲージ場” A_μ を導入した (10.2節). 系は縮退した基底状態を持ち，状態が局所的な対称性を破った結果として，質量を持つベクトル場と，質量を持つ Higgs(ヒッグズ) 実スカラー場を得た．このような方法で質量を導入する目的は，得られる量子場を繰り込み可能にすることである．本章では同じ概念を，さらに複雑なラグランジアンに適用して，これが物理的に注目すべき重要な意味を持つことを見る．

11.1　$SU(2)$ 対称性

標準模型の基礎を与える更なる一般化として，局所的な $U(1)$ 変換だけでなく，局所的な $SU(2)$ 変換の下でも不変なラグランジアン密度を構築してみよう．この概念は最初に Yang(ヤン) と Mills(ミルズ) (1954) によって検討された．まず 2 成分場 (Higgs 2 重項),

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_\text{A} \\ \Phi_\text{B} \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

を導入する．Φ_A と Φ_B は両方とも複素スカラー場である．

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2, \quad \Phi_{\mathrm{B}} = \phi_3 + \mathrm{i}\phi_4$$

したがって，実質的には全部で 4 つの実場が含まれる．

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ が群 $U(1)$ の任意の要素 (element. 元(げん)とも訳される) であり，$\mathbf{U}$ が $SU(2)$ の任意の要素であって $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$ とすると (付録B 参照)，今度はラグランジアン密度が，次の $U(1) \times SU(2)$ 変換の下で不変であることを要請しなければならない．

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi \tag{11.2}$$

"大域的な" $U(1) \times SU(2)$ 対称性を持つ単純なラグランジアン密度は，次のように与えられる．

$$\mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi) \tag{11.3}$$

実場を用いて書き下すと，

$$\Phi^\dagger\Phi = \Phi_{\mathrm{A}}^*\Phi_{\mathrm{A}} + \Phi_{\mathrm{B}}^*\Phi_{\mathrm{B}} = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2$$

$$\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi = \partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \partial_\mu\phi_3\partial^\mu\phi_3 + \partial_\mu\phi_4\partial^\mu\phi_4$$

となる．$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^2\Phi^\dagger\Phi$ と置くならば，このラグランジアン密度は，同じ質量 m を持つ 4 つの独立な自由スカラー場を表す (式 (3.18) 参照)．

標準模型では，大域的な $U(1) \times SU(2)$ 対称性から，局所的な対称性へと移行する必要がある．$U(1)$ 変換は次のように書かれる．

$$\Phi \to \Phi^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi = \exp(-\mathrm{i}\theta\tau^0)\Phi \tag{11.4a}$$

τ^0 は単位行列を表す．

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを局所的な対称性にするために，次の変換則に従うベクトルゲージ場 $B_\mu(x)$ を導入しなければならない．

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) + (2/g_1)\partial_\mu\theta \tag{11.4b}$$

第 7 章と同様に，ラグランジアン密度の式において，

$$\mathrm{i}\partial_\mu \to \mathrm{i}\partial_\mu - (g_1/2)B_\mu$$

のように置き換える．定数 g_1 は理論が含むパラメーターであり，慣例に従って因子 2 を入れてある．

群 $SU(2)$ の任意の要素は，次の形で書ける．

$$\mathbf{U} = \exp(-\mathrm{i}\alpha^k \tau^k) \tag{11.5}$$

α^k は 3 つの実数を表す．τ^k は $SU(2)$ の 3 つの生成子 (generator) だが，これは Pauli（パウリ）のスピン行列と同じものである*．

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

大域的 $SU(2)$ 対称性から，$\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ が時空座標に依存する局所的 $SU(2)$ 対称性への移行のために，それぞれの生成子 τ^k に対応するベクトルゲージ場 $W^k_\mu(x)\tau^k$ を導入しなければならない．行列，

$$\mathbf{W}_\mu(x) = W^k_\mu(x)\tau^k$$

の変換則は，

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x) + (2\mathrm{i}/g_2)\big(\partial_\mu\mathbf{U}(x)\big)\mathbf{U}^\dagger(x) \tag{11.6}$$

であるが，これが変換 (11.4) を一般化したものにあたる．g_2 は，この理論が含むもうひとつのパラメーターである．上記の行列，

$$\mathbf{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W^3_\mu & W^1_\mu - \mathrm{i}W^2_\mu \\ W^1_\mu + \mathrm{i}W^2_\mu & -W^3_\mu \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

が Hermite（エルミート）行列で，固有和（トレース）(trace) がゼロであることに注意されたい．これらの性質は明らかに変換 (11.6) の下で保持される (問題 11.1)．大域的な $SU(2)$ 変換 $\mathbf{W}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger$ は，生成子 τ^k で張られる 3 次元の“弱いアイソスピン空間”におけるベクトル W^k_μ の回転に相当する (付録 B 参照)．

最後に，新たな“共変微分”の演算を次のように定義する．

$$D_\mu\Phi = \left[\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)B_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\mu\right]\Phi \tag{11.8a}$$

---

* (訳注) 通常は，無限小変換生成子 T^k の規格化条件を $\mathrm{Tr}(T^kT^l) = \frac{1}{2}\delta_{kl}$ と置くことが多い．この慣例に従うなら $SU(2)$ の生成子は $\frac{1}{2}\tau^k$ である．

そうすると，次の関係を直ちに証明できる．

$$D'_\mu \Phi' = \left[\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)B'_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}'_\mu\right]\Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi$$

但し，

$$\Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi \tag{11.8b}$$

である．したがって式 (11.3) を一般化した，局所的ゲージ不変性を持つラグランジアン密度は次のように与えられる．

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi) \tag{11.9}$$

Lorentz変換の下で B_μ と $\mathbf{W}_\mu$ が共変 4 元ベクトルとして変換することを要請すれば，$\mathcal{L}_\Phi$ も Lorentz変換の下で不変となる．

11.2　ゲージ場

ゲージ場 B_μ に関して，場の強度テンソル (field strength tensor) $B_{\mu\nu}$ を，

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{11.10}$$

と定義し，4.2節と同様にラグランジアン密度への力学的な寄与を $-(1/4)B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ と置く．

ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の強度テンソルは，$SU(2)$ の非Abel(アーベル)性のために，さらに複雑なものになる．次のように定義しなければならない§．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\mu\right]\mathbf{W}_\nu - \left[\partial_\nu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\nu\right]\mathbf{W}_\mu \tag{11.11}$$

労を厭わなければ，式 (11.6) の $SU(2)$ 変換 $\mathbf{W}_\mu \to \mathbf{W}'_\mu$ の下で，強度テンソルが次のように変換することを容易に証明できる．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} \to \mathbf{W}'_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger \tag{11.12}$$

---

§ (訳註) 式 (11.11) は $\mathbf{W}_{\mu\nu} = (\partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu) + (\mathrm{i}g_2/2)[\mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}_\nu]$ とも書ける．$\mathbf{W}$ が非可換 (非Abel) ゲージ場であるために，後ろの交換子の項が残って，ゲージ場の従う方程式は非線形になる (ゲージ場がゲージ場自身とも相互作用をする)．可換ゲージ場である電磁場の場合 (式 (4.6)) と比較せよ．

この証明の際に，$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$ により，

$$\mathbf{U}(\partial_\mu \mathbf{U}^\dagger) + (\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{0}$$

であることに注意するとよい．最も簡単な変換性 (11.12) を得るために，式 (11.11) のように複雑な $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ の定義が必要なのである．

そして，これら 2 つのゲージ場のラグランジアン密度への力学的な寄与を，

$$\mathcal{L}_{\rm dyn} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}{\rm Tr}\,(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) \tag{11.13}$$

と置く．変換式 (11.12) と，行列の固有和（トレース）の巡回不変性により，$\mathcal{L}_{\rm dyn}$ が局所的 $SU(2)$ 変換の下で不変であることが分かる．

$[\tau^2, \tau^3] = 2{\rm i}\tau^1$ などの関係を用いると，行列 $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ は次のように書ける．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = W^i_{\mu\nu}\tau^i \tag{11.14}$$

ここで，

$$W^1_{\mu\nu} = \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu - g_2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu) \tag{11.15a}$$

$$W^2_{\mu\nu} = \partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\mu - g_2(W^3_\mu W^1_\nu - W^3_\nu W^1_\mu) \tag{11.15b}$$

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - g_2(W^1_\mu W^2_\nu - W^1_\nu W^2_\mu) \tag{11.15c}$$

である．${\rm Tr}\,(\tau^i)^2 = 2$ で，$i \neq j$ のときに ${\rm Tr}\,(\tau^i\tau^j) = 0$ なので，ラグランジアン密度を式 (11.14) を用いて見やすい形に書き直せる．

$$\mathcal{L}_{\rm dyn} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu} \tag{11.16}$$

本章の後の方で示すが，W^1_μ と W^2_μ は荷電成分であって，次のように複素線形結合を定義すると便利である．

$$W^+_\mu = (W^1_\mu - {\rm i}W^2_\mu)/\sqrt{2}, \quad W^-_\mu = (W^1_\mu + {\rm i}W^2_\mu)/\sqrt{2} \tag{11.17}$$

W^-_μ が W^+_μ の複素共役であることに注意されたい．式 (11.15a) と式 (11.15b) を用いて，場の強度を定義しておく．

$$\begin{aligned} W^+_{\mu\nu} &= (W^1_{\mu\nu} - {\rm i}W^2_{\mu\nu})/\sqrt{2} \\ &= (\partial_\mu + {\rm i}g_2 W^3_\mu)W^+_\nu - (\partial_\nu + {\rm i}g_2 W^3_\nu)W^+_\mu \end{aligned} \tag{11.18}$$

$W^-_{\mu\nu}$ も同様に定義される．

また，式 (11.15c) は，

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - \mathrm{i}g_2(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu) \tag{11.19}$$

のように書き直すことができて，式 (11.16) は次のようになる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} \tag{11.20}$$

11.3　$SU(2)$ 対称性の破れ

式 (10.2) と同様に，$V(\Phi^\dagger\Phi)$ を次のように置く．

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger\Phi) &= \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[(\Phi^\dagger\Phi) - \phi_0^2\right]^2 \\ &= \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 - \phi_0^2\right]^2 \end{aligned} \tag{11.21}$$

ϕ_0 は固定されたパラメーターである．この V の下で，系の真空状態としては，スカラー場の 4 次元空間の中の無数の点 (状態) がエネルギー縮退する．ここで $SU(2)$ 対称性を局所的に破ってみる．我々は $SU(2)$ の要素を特定する 3 つの実数パラメーター $\alpha^k(x)$ を任意に決めてよい．この自由度を利用して $\Phi_{\mathrm{A}} = 0$ (2 条件) で，かつ Φ_{B} が実数 (1 条件) になるようなゲージを採用する．そうすると基底状態は，

$$\Phi_{\mathrm{ground}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

となり，励起状態は，

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

という形で表される．$h(x)$ は実場である．

局所的な $U(1)$ 対称性は残る．式 (11.23) の場は，次の $U(1) \times SU(2)$ 変換の下で不変である．

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.24}$$

上記の行列は群 $U(1)$ の 2×2 表現を与えている．この残された対称性が，電磁気学の $U(1)$ 対称性になるのである．

$\mathcal{L}_\Phi$ (式 (11.9)) を $h(x)$ を用いて表したい．式 (11.21) より，

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = m^2h^2 + \frac{m^2h^3}{\sqrt{2}\phi_0} + \frac{m^2h^4}{8\phi_0^2} = V(h)$$

である．また式 (11.8a) と式 (11.7) から，

$$D^\mu\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu h/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}g_1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ B^\mu(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}W_\mu^+(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \\ -W_\mu^3(\phi_0 + h/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

となる．$(D_\mu\Phi)^\dagger$ と $D^\mu\Phi$ をかけることで，$\mathcal{L}_\Phi$ の式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Phi &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2}W_\mu^- W^{+\mu}\left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&\quad + \left[\frac{g_2^2}{4}W_\mu^3 W^{3\mu} - \frac{g_1 g_2}{2}W_\mu^3 B^\mu + \frac{g_2^2}{4}B_\mu B^\mu\right]\left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - V(h) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2}W_\mu^- W^{+\mu}\left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(g_1^2 + g_2^2)Z_\mu Z^\mu\left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - V(h)
\end{aligned} \tag{11.25}$$

上式において，

$$Z_\mu = W_\mu^3\cos\theta_\mathrm{W} - B_\mu\sin\theta_\mathrm{W} \tag{11.26}$$

$$\cos\theta_\mathrm{W} = \frac{g_2}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}, \quad \sin\theta_\mathrm{W} = \frac{g_1}{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}} \tag{11.27}$$

であり，θ_W は " Weinberg角 (ワインバーグ) " (Weinberg angle) と呼ばれる．

場 Z_μ と共に，これと直交する 1 次結合も定義する．

$$A_\mu = W_\mu^3\sin\theta_\mathrm{W} + B_\mu\cos\theta_\mathrm{W} \tag{11.28}$$

式 (11.26) と式 (11.28) は，(B_μ, W_μ^3) 空間における軸の回転に相当する．この回転の式を逆に解くと，

$$B_\mu = A_\mu \cos\theta_\mathrm{W} - Z_\mu \sin\theta_\mathrm{W}$$
$$W^3_\mu = A_\mu \sin\theta_\mathrm{W} + Z_\mu \cos\theta_\mathrm{W} \tag{11.29}$$

となる．これを式 (11.10) と式 (11.19) に代入すると，場の強度テンソルは，

$$B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos\theta_\mathrm{W} - Z_{\mu\nu} \sin\theta_\mathrm{W}$$
$$W^3_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \sin\theta_\mathrm{W} + Z_{\mu\nu} \cos\theta_\mathrm{W} - \mathrm{i}g_2(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu)$$

と与えられる．ここで，

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (A_{\mu\nu}\text{は第 4 章の } F_{\mu\nu}\text{と同じものである})$$
$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \tag{11.30}$$

である．

11.4　場の物理的な同定

我々の議論はここで，全ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_\mathrm{dyn}$ の各項を再構成して，物理的な内容を表すべき所に至った．$\mathcal{L}_\mathrm{dyn}$ (式 (11.20)) において式 (11.29) と式 (11.30) を適用し，B_μ と W^3_μ を A_μ と Z_μ の 2 つの場によって記述し直す．そして次のように書くことにする．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

まず $\mathcal{L}_1$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = &\frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 \\ &- \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\phi_0^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \\ &- \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2}\left[(D_\mu W^+_\nu)^* - (D_\nu W^+_\mu)^*\right]\left[D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}\right] \\ &+ \frac{1}{2} g_2^2 \phi_0^2 W^-_\mu W^{+\mu}\end{aligned} \tag{11.31}$$

で，ここでの共変微分は $D_\mu W^+_\nu = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_2 \sin\theta_\mathrm{W} A_\mu) W^+_\nu$ のようになる．

$\mathcal{L}_1$ は比較的単純で，これが質量を持つ自由な中性スカラーボゾン場 $h(x)$，質量を持つ自由な中性ベクトルボゾン場 $Z_\mu(x)$，および質量を持つ荷電ベクトルボゾン場の対（つい） $W_\mu^+(x)$ と $W_\mu^-(x)$ が電磁場 $A_\mu(x)$ と相互作用をしている系のラグランジアン密度の形を持つことを，容易に見てとれる．

$\mathcal{L}_2$ は残りの相互作用項である．辛抱強く計算をすると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = &\left(\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}h\phi_0\right)\left(g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu\right) \\
&- \frac{m^2 h^3}{\sqrt{2}\phi_0} - \frac{m^2 h^4}{8\phi_0^2} \\
&+ \frac{g_2^2}{4}(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}) \\
&+ \frac{\mathrm{i}g_2}{2}(A_{\mu\nu}\sin\theta_\mathrm{w} + Z_{\mu\nu}\cos\theta_\mathrm{w})(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu}) \\
&- g_2^2\cos^2\theta_\mathrm{w}(Z_\mu Z^\mu W_\nu^- W^{+\nu} - Z_\mu Z^\nu W_\nu^- W^{+\mu}) \\
&+ \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\cos\theta_\mathrm{w}\Big[(Z_\mu W_\nu^- - Z_\nu W_\mu^-)(D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) \\
&\qquad - (Z_\mu W_\nu^+ - Z_\nu W_\mu^+)\big((D^\mu W^{+\nu})^* - (D^\nu W^{+\mu})^*\big)\Big]
\end{aligned} \tag{11.32}$$

我々が出発点で設定した $U(1)\times SU(2)$ 対称性の大部分が，自発的な対称性の破れのために失われている．特に $\mathcal{L}_2$ で記述される相互作用には，元の $SU(2)$ 対称性の跡が見られない．しかしながら上記のような複雑な相互作用の組合せこそが，対称性を破らない場合と同様に，理論を繰り込み可能なものにするのである．

3つのベクトル場 W_μ^+，W_μ^-，Z_μ は，それぞれが弱い相互作用を媒介する W^+ ボゾン，W^- ボゾン，Zボゾンに同定される．これらのウィークボゾンは理論的に予言された後に，実験でも発見された．その質量は，

$$M_\mathrm{W} = 80.33 \pm 0.15\ \mathrm{GeV} \tag{11.33}$$

$$M_\mathrm{Z} = 91.187 \pm 0.007\ \mathrm{GeV} \tag{11.34}$$

である (Particle Data Group 1996)．式 (11.31) と 4.9節から，

$$\phi_0 g_2/\sqrt{2} = M_{\mathrm{W}} \tag{11.35}$$

$$\phi_0\left(g_1^2 + g_2^2\right)^{1/2}/\sqrt{2} = M_{\mathrm{Z}} \tag{11.36}$$

のように対応する．質量比への量子補正を無視すると，式 (11.27) から次式が得られる．

$$\cos\theta_{\mathrm{w}} = M_{\mathrm{W}}/M_{\mathrm{Z}} = 0.8810 \pm 0.0016 \tag{11.37a}$$

通常は $\sin^2\theta_{\mathrm{w}}$ の値が引用されることが多く，これは本書の計算の中にも現れることになる．上記の推定値によると，

$$\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = 0.224 \pm 0.003$$

である．ここでの誤差範囲は主として M_{W} の精度に依存している．$\sin^2\theta_{\mathrm{w}}$ の値を推定する方法は他にもあって，広く認知されている値 (1996) は，

$$\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = 0.2315 \pm 0.0004 \tag{11.37b}$$

である．我々はこれ以降の計算において，この値を採用する．

$\mathrm{W}^{\pm}$ ボゾンが電荷 $\pm e$ を持つことは，実験的に確認されている．式 (11.31) におけるゲージ共変微分は，

$$D_\mu W_\nu^+ = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_2\sin\theta_{\mathrm{w}} A_\mu)W_\nu^+$$

で，この電磁場 A_μ への結合と，式 (11.27) の関係から，

$$e = g_2\sin\theta_{\mathrm{w}} = g_1\cos\theta_{\mathrm{w}} \tag{11.38}$$

と同定される‡.

W_μ^1，W_μ^2，Z_μ は，式 (4.15) と同様の自由場展開が可能だが，3 つの偏極状態を持つ (4.9節参照)．量子場としての W_μ^+ は W^+ ボゾンを消滅させて W^- ボゾンを生成する．W_μ^- の方は W^- ボゾンを消滅させて W^+ ボゾンを生成する．

最後に Higgs実スカラー場 $h(x)$ が残っている．真空状態における Higgs

‡ (訳註) 電荷素量 (電磁結合定数) e は第一義的な基礎定数ではなく，$U(1)$ 電荷結合定数 g_1 と $SU(2)$ 電荷結合定数 g_2 の混合の結果として現れる量と見なされる ($1/e^2 = 1/g_1^2 + 1/g_2^2$).

場[§]の期待値 ϕ_0 は，式 (11.35) より，

$$\phi_0 = \frac{\sqrt{2}M_\mathrm{W}}{g_2} = \frac{\sqrt{2}M_\mathrm{W}\sin\theta_\mathrm{w}}{e} = 180\ \mathrm{GeV} \tag{11.39}$$

である．実験によって決められていない唯一のパラメーターは，Higgsボソンの質量 $M_\mathrm{H} = \sqrt{2}m$ である．Higgsボソンが標準模型の基本的な部分を占めていることは明らかだが，その存在はまだ実験的に確認されていない．今までHiggsボソンが発見されていないことから $M_\mathrm{H} > 64$ GeV と考えられる．最近の実験と理論の研究により，M_H はこの値をさほど上回らないものと予想されている．

本章では，初めに $U(1)$ と $SU(2)$ の対称性を要請し，自発的な $SU(2)$ 対称性の破れを想定することで，電磁場と質量を持つベクトルボソン $\mathrm{W}^\pm$，Z の場，およびHiggs実スカラー場が明快に導き出されることを見てきた．次章では，これらのボソン場に各レプトン場を加えた実り多いWeinberg-Salamの電弱理論を見ることにする．

練習問題　(＊解法とヒント p.296)

*11.1 式 (11.6) で定義される $\mathbf{W}'_\mu$ がHermite（エルミート）行列で，その固有和がゼロであることを示せ．(付録B の式 (B.9)：$\mathbf{U} = \cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\tau})$ を用いること．)

11.2 $\mathcal{L}_\mathrm{dyn}$ の式 (11.13) と (11.16) が等価であることを証明せよ．

*11.3 式 (11.31) の右辺の最後の 2 つの項が，質量を持つ荷電ベクトルボソン場の対（つい）に対応することを証明せよ．

*11.4 3 次摂動において，Higgsボソンが 2 つの光子に崩壊し得ることを示せ．この過程を表すFeynmanダイヤグラムを描いてみよ．

*11.5 $SU(2)$ 変換 $\Phi \to \Phi'$,

$$\begin{pmatrix} \Phi'_\mathrm{A} \\ \Phi'_\mathrm{B} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \Phi_\mathrm{A} \\ \Phi_\mathrm{B} \end{pmatrix}$$

§ (訳註) 原書ではHiggs機構の議論において最初に導入する複素場 (もしくは複素場 2 重項) Φ も，自発的な対称性の破れの結果として現れる実スカラー場 h も，両方ともHiggs field と呼んでいる．訳稿では前者を“Higgs場”，後者を“Higgs実スカラー場”とした．後者に対応する粒子が“Higgsボソン”である．

に関して，まず式 (B.9) を用いて $\tau^2\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\tau^2$ を示せ．そして次式を証明せよ．

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{B}}'^* \\ -\Phi_{\mathrm{A}}'^* \end{pmatrix} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{B}}^* \\ -\Phi_{\mathrm{A}}^* \end{pmatrix}$$

*11.6 $SU(2)$ 行列 $\mathbf{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$ (ここで $\boldsymbol{\alpha} = \alpha(\sin\phi, \cos\phi, 0)$ と置く) は，

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\alpha \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．また 2 成分複素場，

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{A}} \\ \Phi_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \\ b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \end{pmatrix}$$

を，$\phi = (\delta-\gamma)$，$\alpha = -\tan^{-1}(a/b)$ と置いた $SU(2)$ 変換 $\Phi' = \mathbf{U}\Phi$ によって，

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{A}}' \\ \Phi_{\mathrm{B}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \end{pmatrix}$$

という形に変換できることを示せ．さらにそこから $\boldsymbol{\alpha} = \gamma(0,0,1)$ と置いた $SU(2)$ 変換を介して Φ' を標準形 (11.23) に変換できることを示せ．

第 **12** 章

レプトンのWeinberg-Salam理論

本章では各レプトン場を，電磁場および W^+，W^-，Z のゲージボゾン場すべてに結合させる．この理論は低エネルギーにおいて第 9 章の現象論を再現しなければならない．この指針と $U(1) \times SU(2)$ の局所的ゲージ対称性の要請から，それぞれの結合の仕方は一意的に決まる．

我々は既に Higgs（ヒッグズ）機構によって $\mathrm{W}^{\pm}$ ボゾンと Z ボゾンに質量が付与されることを見た．荷電レプトン (電子，ミュー粒子，タウ粒子) にも質量を与えるために，これらの粒子も Higgs場と結合させなければならない．最終的に電弱相互作用を統一する Weinberg-Salam（ワインバーグ-サラム）理論に到達することになる．

12.1　レプトン 2 重項と Weinberg-Salam理論

まずは $U(1)$ および $SU(2)$ 変換の下で不変なレプトン場に関するラグランジアン密度を構築しよう．左手型の電子スピノル $\mathrm{e_L}$ と電子ニュートリノスピノル ν_{eL} を，式 (11.1) の Higgs場のように $SU(2)$ の 2 重項として一緒にする．

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

ここで表記を確認しておくが，第 6 章で示したように，2 成分の左手型スピノルは ψ_{L}，右手型スピノルは ψ_{R} のように添字を付けて表す．この 2 重項は

$SU(2)$ 変換の下で Higgs 2 重項と全く同じように変換する．

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{UL} \tag{12.2}$$

$SU(2)$ 変換は 2 重項をなす 2 つのスピノル場を混合するので，Lorentz不変性を維持するためには，同じ Lorentz変換性を持つ場の組合せだけが $SU(2)$ の 2 重項を形成できる．

右手型のニュートリノが存在する証拠はないので，右手型の電子スピノル $\mathrm{e_R}$ には 2 重項を形成する相手が無い．そこで $SU(2)$ 変換の下で $\mathrm{e_R}$ は不変であると結論する．

$$\mathrm{e_R} \to \mathrm{e'_R} = \mathrm{e_R} \tag{12.3}$$

変換則 (12.2) に整合するように，すべての $SU(2)$ ゲージ共変微分は同じ形 $\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}_\mu$ でなければならない．ここで式 (11.8) と式 (11.38) に示した通りに $g_2 \sin\theta_\mathrm{W} = e$ である．これは群 $SU(2)$ の非Abel性 (非可換性) の帰結である．しかしながら $U(1)$ ゲージ場 B_μ への結合定数にはこのような制約がない (問題12.1 参照)．共変微分は，

$$D_\mu \mathbf{L} = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}_\mu + \mathrm{i}(g'/2)B_\mu\right]\mathbf{L} \tag{12.4}$$

と書かれるが g' は任意である．我々はここで，ニュートリノが電気的に中性となり，電子が電荷 $-e$ を持つように g' を選ばなければならない．$D_\mu\mathbf{L}$ の中で電磁場 A_μ に結合する項は W_μ^3 と B_μ の線形結合である．式 (11.7) と式 (11.29) を用いると，A_μ の項は，

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu + \left\{\mathrm{i}(g_2/2)\sin\theta_\mathrm{W} + \mathrm{i}(g'/2)\cos\theta_\mathrm{W}\right\}A_\mu, & 0 \\ 0, & \partial_\mu + \left\{-\mathrm{i}(g_2/2)\sin\theta_\mathrm{W} + \mathrm{i}(g'/2)\cos\theta_\mathrm{W}\right\}A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mathrm{eL} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix}$$

である．ニュートリノを中性にして，電子に電荷 $-e$ を与えるゲージ微分 $\partial_\mu \nu_\mathrm{eL}$ および $(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\mathrm{e_L}$ を得るためには，

$$g' \cos\theta_\mathrm{W} = -g_2 \sin\theta_\mathrm{W} = -e$$

と設定すればよい．左手型の場に対する完全なゲージ共変微分は，

$$D_\mu \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \mathrm{i}(e/\sin 2\theta_\mathrm{W}) Z_\mu, & \mathrm{i}\{e/(\sqrt{2}\sin\theta_\mathrm{W})\} W_\mu^+ \\ \mathrm{i}\{e/(\sqrt{2}\sin\theta_\mathrm{W})\} W_\mu^-, & \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu - \mathrm{i}e\cot(2\theta_\mathrm{W}) Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mathrm{eL} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

と与えられる．ここで式 (11.7)，式 (11.17)，式 (11.29) を用いた．

$\mathrm{e_R}$ のゲージ共変微分は，

$$D_\mu \mathrm{e_R} = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)B_\mu\right]\mathrm{e_R} \tag{12.6a}$$

という形でなければならない．電子の電荷は $-e$ なので $g'' = -2e/\cos\theta_\mathrm{W} = -2g_1$ と置いて (式 (11.38) 参照) 式 (11.29) を再び用いると，次のようになる．

$$D_\mu \mathrm{e_R} = \left[(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu) + \mathrm{i}e\tan\theta_\mathrm{W} Z_\mu\right]\mathrm{e_R} \tag{12.6b}$$

$g'' = -2g_1$，$g' = -g_1$ とすると，局所的 $U(1) \times SU(2)$ 変換，

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}\mathbf{U}(x)\mathbf{L}$$
$$\mathrm{e_R} \to \mathrm{e'_R} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta(x)}\mathrm{e_R}$$

の下で，ゲージ共変微分が次の関係を満たすことを容易に確認できる．

$$D'_\mu \mathbf{L}' = \left(\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}'_\mu + \mathrm{i}(g'/2)B'_\mu\right)\mathbf{L}' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\mathbf{L}$$
$$D'_\mu \mathrm{e'_R} = \left(\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)B'_\mu\right)\mathrm{e'_R} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}D_\mu\mathrm{e_R}$$

ゲージ場 B_μ および $\mathbf{W}_\mu$ は，式 (11.4b) および式 (11.6) のように変換する．

ここで電子と電子ニュートリノのラグランジアン密度の力学的な部分に関して，ゲージ不変かつ Lorentz 不変な式を，次のように構築できる．

$$\mathcal{L}^\mathrm{e}_\mathrm{dyn} = \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}D_\mu\mathbf{L} + \mathrm{e}^\dagger_\mathrm{R}\sigma^\mu \mathrm{i}D_\mu\mathrm{e_R} \tag{12.7}$$

ゲージ共変微分の構築によってゲージ不変性が得られ，5.4 節に示したスピノルの性質によって Lorentz 不変性が得られている ($\tilde{\sigma}_\mu$ 行列はスピノル添字に作用し，$SU(2)$ 変換は独立にスピノル場 2 重項の成分に作用する)．電磁場との相互作用を除き，因子 $D_\mu\mathbf{L}$ から，重いベクトルボソンとの相互作用が完全に決まることに注意されたい．

最後に荷電レプトンに質量を持たせなければならない．ゲージ不変かつ Lorentz 不変で，電子に質量を与え，ニュートリノの質量はゼロに保つよう

なラグランジアン密度への寄与は，次のように与えられる§.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} &= -c_{\mathrm{e}}\left[(\mathbf{L}^{\dagger}\Phi)\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}(\Phi^{\dagger}\mathbf{L})\right] \\ &= -c_{\mathrm{e}}\left[(\nu^{\dagger}_{\mathrm{L}}\Phi_{\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\Phi_{\mathrm{B}})\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}(\Phi^{\dagger}_{\mathrm{A}}\nu_{\mathrm{L}} + \Phi^{\dagger}_{\mathrm{B}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}})\right]\end{aligned} \tag{12.8}$$

Φ は Higgs 場の 2 重項で，c_{e} は無次元の結合定数である．自発的に対称性が破れると (式 (11.23) 参照)，$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}}$ は次のようになる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} = -c_{\mathrm{e}}\phi_0(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}) - \frac{c_{\mathrm{e}}h}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}) \tag{12.9}$$

これを Dirac 場のラグランジアン密度 (5.12) と比較すると，$c_{\mathrm{e}}\phi_0$ は電子の質量 m_{e} と同定される．対称性の原理の下で質量を導入すると，不可避的に電子場と Higgs 実スカラー場 $h(x)$ の相互作用項も現れる．その結合定数は，

$$\frac{c_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2}} = \frac{m_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2}\phi_0} = 2.01 \times 10^{-6} \tag{12.10}$$

である (式 (11.39) を用いた)．c_{e} がこのように小さいことは好都合である．我々はこの因子のために QED の計算を無意味にしたくない！

電子と電子ニュートリノに関する全ラグランジアン $\mathcal{L}^{\mathrm{e}}$ は，式 (12.7) と式 (12.8) によって与えられる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}} = \mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{dyn}} + \mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} \tag{12.11}$$

$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}$ から次のように，ひと揃(そろ)いの項を抜き出すことができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Dirac}} &= \nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu}\nu_{\mathrm{L}}) + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu})\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \\ &\quad + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu})\mathrm{e}_{\mathrm{R}} - m_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}})\end{aligned} \tag{12.12}$$

これは第 6 章と第 7 章で見た，質量のない Dirac ニュートリノと，電磁場内にある質量 m_{e}，電荷 $-e$ の Dirac 電子に関するラグランジアンの式にあたる．

---

§ (訳註) 右手型の e_{R} は 1 重項で，左手型の $\mathbf{L} = (\nu_{\mathrm{eL}}, \mathrm{e}_{\mathrm{L}})$ は 2 重項を形成しているというアンバランスのために，電子だけに“初めに質量ありき”という考え方では Dirac ラグランジアン (5.12) の質量項 $-m(\psi^{\dagger}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} + \psi^{\dagger}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}})$ に相当する項をうまく作ることができない．このために自発的に対称性を破っている Higgs 場を介在させて，電子はそこから質量を付与されていると考える．

ミュー粒子とミュー・ニュートリノに関するラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\mu}$ や，タウ粒子とタウ・ニュートリノに関するラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\tau}$ も式 (12.11) と同じ形の式で表されるが，質量パラメーターと，それに伴って Higgs 場との結合定数だけが変更される．

$$\frac{c_{\mu}}{\sqrt{2}} = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{2}\phi_0} = 4.15 \times 10^{-4}, \quad \frac{c_{\tau}}{\sqrt{2}} = \frac{m_{\tau}}{\sqrt{2}\phi_0} = 6.98 \times 10^{-3} \qquad (12.13)$$

$SU(2)$ ゲージ理論の結合定数 g_2，あるいは等価的に Weinberg 角 θ_{W} によって (式 (11.38) 参照) 場 $W^{\pm}$ と場 Z への結合が決まる．これらは全世代のレプトンに関して同じでなければならないが，これは $SU(2)$ によって理論に課された性質であり，“ レプトンの同格性 ” を表している．

Weinberg-Salam 理論 (Weinberg 1967; Salam 1968) における完全なラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\mathrm{WS}}$ は，各世代のレプトンからの寄与と，式 (11.31) と式 (11.32) で与えられるボゾンの寄与の総和として表される．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{WS}} = \mathcal{L}^{\mathrm{e}} + \mathcal{L}^{\mu} + \mathcal{L}^{\tau} + \mathcal{L}^{\mathrm{bosons}} \qquad (12.14)$$

$\mathcal{L}^{\mathrm{WS}}$ の式は理論の持つべき対称性，すなわち Lorentz 変換の下での不変性と，$U(1)$ および $SU(2)$ 変換の下での不変性に関する考察から決定された．ボゾンとレプトンの質量は，局所的な対称性を破る Higgs 機構を通じて付与されている．'t Hooft（ト・フーフト） (1971) は，この理論が繰り込み可能であることを，革新的な解析手法を用いて証明した．第 13 章では，この理論を支持する多くのデータを見る予定である．

12.2　レプトンの $W^{\pm}$ への結合

電子と電子ニュートリノのゲージ場 W^{+} と W^{-} への結合は，式 (12.5) と式 (12.7) から該当する項を拾い出すことによって，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{eW}} &= -\left(g_2/\sqrt{2}\right)\nu_{\mathrm{eL}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}W_{\mu}^{+} - \left(g_2/\sqrt{2}\right)\mathrm{e}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}}W_{\mu}^{-} \\ &= -\left(g_2/\sqrt{2}\right)\left[j_{\mathrm{e}}^{\mu\dagger}W_{\mu}^{+} + j_{\mathrm{e}}^{\mu}W_{\mu}^{-}\right] \end{aligned} \qquad (12.15)$$

右手型の場は，この相互作用に対する寄与を持たない．第 9 章で示したように，電子の関わる荷電カレントは次式で定義される．

$$j_{\mathrm{e}}^{\mu} = \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}}, \quad j_{\mathrm{e}}^{\mu\dagger} = \nu_{\mathrm{eL}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \tag{12.16}$$

これと同様にミュー粒子とタウ粒子の荷電カレントも存在するので，全レプトンの荷電カレントは，

$$j^{\mu} = (\mathrm{e}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} + \mu_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mu\mathrm{L}} + \tau_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\tau\mathrm{L}}) \tag{12.17}$$

であり，全相互作用ラグランジアン密度は次式で与えられる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lW}} = -\left(g_2/\sqrt{2}\right)\left[j^{\mu\dagger}W_{\mu}^{+} + j^{\mu}W_{\mu}^{-}\right] \tag{12.18}$$

9.4節でミュー粒子崩壊の議論に用いた実効的な $\mathcal{L}_{\mathrm{lepton}}$ は，Weinberg-Salam理論の低エネルギー極限の近似として得ることができる．質量 M_{W} は非常に大きいので，低エネルギーでラグランジアン密度への W の寄与を考えると，式(11.31)では $M_{\mathrm{W}}^2W_{\mu}^{-}W^{+\mu}$ の項が支配的になり，上記の相互作用と併せたラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} \approx M_{\mathrm{W}}^2W_{\mu}^{-}W^{+\mu} - \left(g_2/\sqrt{2}\right)\left[j^{\mu\dagger}W_{\mu}^{\dagger} + j^{\mu}W_{\mu}^{-}\right] \tag{12.19}$$

となる．実際の物理的な場は，この作用を停留値にする形をとる．W_{μ}^{+} と W_{μ}^{-} を独立に変化させると，場の式が，

$$M_{\mathrm{W}}^2W_{\mu}^{-} = \left(g_2/\sqrt{2}\right)j_{\mu}^{\dagger}, \quad M_{\mathrm{W}}^2W_{\mu}^{+} = \left(g_2/\sqrt{2}\right)j_{\mu} \tag{12.20}$$

と与えられ，式(12.19)に対してこれを適用すると，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} \approx -\frac{1}{2}g_2^2M_{\mathrm{W}}^{-2}j_{\mu}^{\dagger}j^{\mu} \tag{12.21}$$

となる．この $\mathcal{L}_{\mathrm{W}}$ を式(9.8)の $\mathcal{L}_{\mathrm{lepton}}$ と比較すると，

$$G_{\mathrm{F}} = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_{\mathrm{W}}^2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_{\mathrm{W}}^2\sin^2\theta_{\mathrm{w}}} \tag{12.22}$$

と同定することで両者は一致する．$M_{\mathrm{W}} = 80.33$ GeV，$M_{\mathrm{Z}} = 91.187$ GeV，$\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = 1 - M_{\mathrm{W}}^2/M_{\mathrm{Z}}^2$ と置くと $G_{\mathrm{F}} = 1.12 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$ と算出されるが，これは実験値として受け入れられている $1.166 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$ によく一致している．歴史的には G_{F} の値と θ_{w} の推定(13.1節参照)から $\mathrm{W}^{\pm}$ ボソンとZボソンの質量が予言され，その後CERNに陽子-反陽子衝突型加速器(コライダー)が建設されて，これらの粒子が発見された．

12.3 レプトンの Z への結合

ゲージ場 Z へのレプトンの結合の式は，式 (12.7) から Z_μ を含む項を拾い上げることによって得られる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{eZ}} &= -\nu_{\mathrm{eL}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} \left(\frac{e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right) Z_\mu + \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}} \left(\frac{e\cos(2\theta_{\mathrm{W}})}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right) Z_\mu \\ &\quad - \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}} (e\tan\theta_{\mathrm{W}}) Z_\mu \qquad \text{(式 (12.5) と式 (12.6b) を用いた．)} \\ &= \frac{-e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})} (j_{\mathrm{neutral}})_\mu Z^\mu\end{aligned}$$

上式における中性カレントは，

$$\begin{aligned}(j_{\mathrm{neutral}})^\mu &= \nu_{\mathrm{eL}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} - \cos(2\theta_{\mathrm{W}}) \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}} \\ &\quad + 2\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}}\end{aligned} \tag{12.23}$$

と与えられる．$\mathcal{L}_{\mu\mathrm{Z}}$ と $\mathcal{L}_{\tau\mathrm{Z}}$ も同様の式で表される．Z への結合には，右手型のレプトン場も含まれることに注意されたい．

$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}}$ の低エネルギー極限の式は，12.2節で $\mathcal{L}_{\mathrm{W}}$ の低エネルギー極限を求めたのと同様に結合定数を同定して決まることになる．式 (12.23) と式 (9.17) の比較により，

$$c_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}, \quad c_{\mathrm{V}} = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \tag{12.24}$$

と置くと，低エネルギー極限の式は，実効的なラグランジアン密度 (9.15) と一致する．

実効的なラグランジアン密度から計算される，低エネルギーでのミュー・ニュートリノ-電子弾性散乱の断面積は，

$$\sigma(\nu_\mu + \mathrm{e}^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^-) = \frac{G_{\mathrm{F}}^2 s}{\pi}\left[\frac{4}{3}\sin^4\theta_{\mathrm{W}} - \sin^2\theta_{\mathrm{W}} + \frac{1}{4}\right] \tag{12.25}$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^- \to \bar{\nu}_\mu + \mathrm{e}^-) = \frac{G_{\mathrm{F}}^2 s}{\pi}\left[\frac{4}{3}\sin^4\theta_{\mathrm{W}} - \frac{1}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}} + \frac{1}{12}\right] \tag{12.26}$$

となる．s は重心系エネルギーの自乗で，$E_\nu \gg m_{\mathrm{e}}$ である (Perkins 1987, p.327 参照)．

低エネルギー ($\ll M_{\mathrm{Z}}$, M_{W}) におけるこれらの断面積は CERN で測定され (CHARM II Collaboration 1994)，その比から $\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ は，

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.2324 \pm 0.0083$$

と推定された．Fermi定数 G_{F} も低エネルギー現象から実験的に知られており，もちろん e の値もよく知られている．したがって標準模型の枠組みの中で，低エネルギーのデータだけから，式 (12.22) と式 (11.37) を用いてゲージボゾン Z と $\mathrm{W}^{\pm}$ の質量を推定できる (初期の $\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ の推定値は，ニュートリノ-原子核散乱によるものであった).

12.4　レプトン数の保存と電荷保存

Weinberg-Salamのラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\mathrm{WS}}$ は，12.1節の議論とはまた別に，大域的 $U(1)$ 対称性も備えている．すなわち $U(1)$ 変換 $\mathbf{L}_{\mathrm{e}} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathbf{L}_{\mathrm{e}}$, $\mathrm{e}_{\mathrm{R}} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}$ の下で不変である．α は定数の位相である (式 (12.7) と式 (12.9) を参照)．時空座標に依存する変分 $\delta\alpha$ を導入して $\alpha \to \alpha + \delta\alpha(x)$ と置く常套手段 (もはや読者にはお馴染みであろう) の下で，作用の1次変分は力学的な部分 $\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{dyn}}$ (式 (12.7)) から生じ，

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int \mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathbf{L}\partial_{\mu}(\delta\alpha)\mathrm{d}^4x - \int \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}\partial_{\mu}(\delta\alpha)\mathrm{d}^4x \\ &= \int \bigl[\partial_{\mu}(\mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathbf{L}) + \partial_{\mu}(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{R}})\bigr](\delta\alpha)\mathrm{d}^4x\end{aligned}$$

と与えられる．第2式は第1式に対する部分積分によって得た．任意の $\delta\alpha$ の下で $\delta S = 0$ を要請すると，

$$\partial_{\mu}(\nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}) + \partial_{\mu}(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}) = 0$$

でなければならない．これを，

$$\partial_{\mu}(J^{\mu}_{\mathrm{e}}) = 0 \tag{12.27}$$

と書くこともできるが，上式において，

$$\begin{aligned}J^0_{\mathrm{e}} &= \nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\nu_{\mathrm{eL}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} \\ J^i_{\mathrm{e}} &= \nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^i\nu_{\mathrm{eL}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^i\mathrm{e}_{\mathrm{L}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^i\mathrm{e}_{\mathrm{R}}\end{aligned} \tag{12.28}$$

である．式 (12.27) は更に，

$$\frac{\partial J_{\mathrm{e}}^{0}}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{e}}=0 \tag{12.29}$$

と書き直すことができて，電子世代 (第 1 世代) のレプトン数保存を表す．同様に $\mathcal{L}^{\mathrm{WS}}$ のミュー粒子やタウ粒子に関係する部分に $U(1)$ 変換を施すと，ミュー世代 (第 2 世代) のレプトン数保存，タウ世代 (第 3 世代) のレプトン数保存が与えられる．これらの保存則を破るような反応は観測されていない．

第 4 章と第 5 章で見たように，A_μ を変化させることにより非斉次Maxwell方程式が得られる．電磁カレント (電流密度) への寄与は，荷電レプトンからだけでなく，荷電した $W^{\pm}$ 場からも生じる．電荷保存則はMaxwell方程式から導くこともできるが，Weinberg-Salamのラグランジアン密度 (12.14) の各項の $U(1)$ 対称性から，より直接的に得ることも可能である．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}_{\mathrm{L}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}_{\mathrm{L}},\quad \mathrm{e}_{\mathrm{R}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}\\
&\mu_{\mathrm{L}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mu_{\mathrm{L}},\quad \mu_{\mathrm{R}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mu_{\mathrm{R}}\\
&\tau_{\mathrm{L}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\tau_{\mathrm{L}},\quad \tau_{\mathrm{R}}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\tau_{\mathrm{R}}\\
&W_\mu^+\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}W_\mu^+,\quad W_\mu^-\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}W_\mu^-
\end{aligned} \tag{12.30}$$

12.5 CP対称性

第 5 章において，空間反転操作の下で左手型スピノル ψ_{L} は右手型スピノル ψ_{R} に，右手型スピノルは左手型スピノルに変換することを見た (式 (5.27))．Weinberg-Salamラグランジアンは，レプトン波動関数の左手型成分だけが $SU(2)$ ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ に結合しているので空間反転対称性を持たない．また第 7 章で荷電共役変換，

$$\psi_{\mathrm{L}}^{C}=-\mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{R}}^{*},\quad \psi_{\mathrm{R}}^{C}=\mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^{*}$$

を論じたが，この変換はDirac方程式の粒子の解を反粒子の解と関係づける．Weinberg-Salam理論では，ニュートリノに関して左手型の場だけが存在しているので，荷電共役対称性も成立していない．

しかしWeinberg-Salamラグランジアンは，両方の操作を組み合わせた CP (荷電共役，パリティ) 変換に関する対称性を持つ．この対称性の意味するところは，右手型座標系で記述された粒子の物理と，左手型座標系で記述され

た反粒子の物理が同じだということである．

CP操作の下で，レプトン場は，

$$\psi_{\mathrm{L}}^{CP} = -\mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^*, \quad \psi_{\mathrm{R}}^{CP} = \mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{R}}^* \tag{12.31}$$

のように変換する．電弱理論に含まれる他の場は，以下のように変換する．

Higgs場：

$$\begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{A}}^{CP} \\ \Phi_{\mathrm{B}}^{CP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{A}}^* \\ \Phi_{\mathrm{B}}^* \end{pmatrix}$$

$U(1)$ゲージ場:

$$B_0^{CP} = -B_0, \quad B_i^{CP} = B_i$$

$SU(2)$ゲージ場:

$$\begin{pmatrix} W_0^3 & W_0^1 - \mathrm{i}W_0^2 \\ W_0^1 + \mathrm{i}W_0^2 & -W_0^3 \end{pmatrix}^{CP} = -\begin{pmatrix} W_0^3 & W_0^1 + \mathrm{i}W_0^2 \\ W_0^1 - \mathrm{i}W_0^2 & -W_0^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W_i^3 & W_i^1 - \mathrm{i}W_i^2 \\ W_i^1 + \mathrm{i}W_i^2 & -W_i^3 \end{pmatrix}^{CP} = \begin{pmatrix} W_i^3 & W_i^1 + \mathrm{i}W_i^2 \\ W_i^1 - \mathrm{i}W_i^2 & -W_i^3 \end{pmatrix}$$

上記の変換に基づき，

$$\begin{aligned} &W_0^{+CP} = -W_0^-, \quad W_i^{+CP} = W_i^- \\ &Z_0^{CP} = -Z_0, \quad Z_i^{CP} = Z_i \\ &A_0^{CP} = -A_0, \quad A_i^{CP} = A_i \end{aligned} \tag{12.32}$$

となる．場の空間微分は変換前後で符号が反転する．

ラグランジアン密度がこれらの変換の下で不変であることを示すには，いくらか注意が必要である．ここではひとつの項だけを取り上げるが，完全な議論のために必要な手順をすべて含んでいるので，他の項の検討は読者に委ねることにする．式 (12.7) の中から，

$$\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{i}\big[\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)B_\mu\big]\mathrm{e}_{\mathrm{R}} = l \quad \text{（と仮に名付ける．）}$$

を考えよう．それぞれの場を CP 変換して，∂_i を $-\partial_i$ に置き換えると，

$$l^{CP} = \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathrm{i}\big[\partial_\mu - \mathrm{i}(g''/2)B_\mu\big]\,\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^*$$

となる．但し次の関係も利用した．

$$(\sigma^2)^2 = \mathbf{I}, \quad \sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -(\sigma^i)^{\mathrm{T}}$$

演算子 ∂_μ は，ここでは共役な相手方の場へ作用している．l^{CP} は l と同じではないが，その違いは全微分の形で表されるものであり，3.1節で説明したようにラグランジアンに任意関数の全微分を加えても結果への影響はない．l^{CP} に $-\mathrm{i}\partial_\mu\big[\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^*\big]$ を加えると，次のようになる．

$$-\mathrm{i}(\partial_\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^* + (g''/2)B_\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\sigma^\mu)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^*$$

転置を施すことで積の順序の入れ替えが生じると，e_{R} と $\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger$ がフェルミオン場で反交換するために負号が現れて l と同じ式に戻る．

12.6 $\mathcal{L}$ の質量項の一般化

後からクォークを扱えるように理論を拡張するときのために，ラグランジアン密度の更なる一般化の可能性を考察して本章を終えることにしよう．レプトン族の Higgs 場への結合は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}} = -\sum_{i=1}^{3} c_i\big[(\mathbf{L}_i^\dagger\Phi)r_i + r_i^\dagger(\Phi^\dagger\mathbf{L}_i)\big]$$

と表される．和はレプトンの 3 世代に関するもので，各世代を扱えるように式 (12.8) の表記を少々改めてある．上式の代わりに，次のように一般化した結合を想定することもできる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}}^{\mathrm{gen}} = -\sum\big[G_{ij}(\mathbf{L}_i^\dagger\Phi)r_j + G_{ij}^* r_j^*(\Phi^\dagger\mathbf{L}_i)\big]$$

G_{ij} を任意の 3×3 複素行列と考えても，上式は $U(1)\times SU(2)$ 対称性を保持する．

この結合の形は，すでに導入したものと本質的な違いはない．何故なら任意の複素行列は，常に 2 つのユニタリー行列 $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$ と $\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ によって実対角行列

に変換できるからである (付録A).

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\mathbf{C}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$$

$\mathbf{C}$ の $i \neq j$ の行列要素に関しては $C_{ij} = 0$ である.

$\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$ と $\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ は一般に，両方に左から次のような同じ“位相因子行列”を掛けることのできる自由度を除くと，一意的に決まる.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3} \end{pmatrix}$$

$r_i' = U_{\mathrm{R}ij} r_j$，$L_i' = U_{\mathrm{L}ij} L_j$ と定義すれば，元のHiggs場への結合の形を回復できる．ラグランジアン密度の力学的な項は，これらのユニタリー変換の後も同じ形になるので (問題12.5)，$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}}^{\mathrm{gen}}$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{mass}}$ と同じ物理を少々複雑に表現したものに過ぎない．3つの位相因子 $\exp(\mathrm{i}\alpha_k)$ は，それぞれ $U(1)$ 対称性に対応し，電子世代，ミュー世代，タウ世代のレプトン数保存を導く.

練習問題　(＊解法とヒント p.297)

12.1 W_μ をゼロと置き，次の力学的ラグランジアン密度を考える.

$$\mathcal{L}_1 = \mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}\big(\partial_\mu + \mathrm{i}(g'/2)B_\mu\big)\mathbf{L}$$

式 (11.4b) のゲージ変換,

$$B_\mu \to B_\mu' = B_\mu + (2/g_1)\partial_\mu\theta$$

の下で，$\mathbf{L}$ が,

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \exp\big[-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta\big]\mathbf{L}$$

と変換するならば，$\mathcal{L}_1$ は不変であることを示せ.

B_μ をゼロと置き，次のラグランジアン密度を考える.

$$\mathcal{L}_2 = \mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}\big(\partial_\mu + \mathrm{i}(g'/2)\mathbf{W}_\mu\big)\mathbf{L}$$

式 (11.6) のゲージ変換,

$$\mathbf{W}_\mu \to \mathbf{W}_\mu' = \mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^{\dagger} + (2\mathrm{i}/g_2)(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^{\dagger}$$

の下で，$\mathcal{L}_2$ を不変にする唯一の条件が,

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{U}\mathbf{L} \quad \text{and} \quad g' = g_2$$

であることを示せ.

*12.2 第 11 章に示した数学的構造の下で，2 つの場によって $SU(2)$ の 2 重項を形成する場合には，それらの電荷が e の違いを持たなければならないことを示せ.

*12.3 式 (12.9) を見ると，Higgs ボゾンが $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 対に崩壊できることが分かる．Higgs ボゾンが静止している座標系から見ると，生成する電子と陽電子は反対向きに等しい大きさの運動量を持ち，同じヘリシティ(両方が正，もしくは両方が負)を持たねばならないことを示せ.

崩壊後の，運動量の確定した終状態密度は，

$$\rho(E_f) = \frac{V}{(2\pi)^2} p_{\mathrm{e}} E_{\mathrm{e}}$$

と表されることを示せ．p_{e} と E_{e} はそれぞれ電子の運動量とエネルギーである.

この遷移の行列要素を計算し，そこから摂動の最低次において，

$$[\text{全崩壊頻度}] = \frac{c_{\mathrm{e}}^2}{16\pi} m_{\mathrm{H}} \left(\frac{v_{\mathrm{e}}}{c}\right)^3$$

と与えられることを示せ．v_{e} は電子の速度である.

*12.4 Higgs ボゾンのレプトン化部分幅 (レプトンへの崩壊頻度) と質量の比 Γ/m_{H} の近似値が，

$$\frac{1}{16\pi}\left(\frac{m_\tau}{\phi_0}\right)^2 \approx 2\times 10^{-6}$$

と与えられることを示せ.

12.5 12.6 節のユニタリー変換の下で，ラグランジアン密度の力学的な項の形が保持されることを示せ.

第 13 章

Weinberg-Salam理論の検証

13.1 ウィークボゾンの探索

前章では Weinberg-Salam の電弱理論が，低エネルギー極限において第 9 章に示した現象論に帰着することを見た．この理論が低エネルギーにおいて，あらゆる β 崩壊をよく記述することは疑いないが，それ以外にも非常に多くのことを記述できるようになる．式 (9.14) の異常な断面積の式は，次のように修正される．

$$\sigma(\nu_\mu \mathrm{e}^- \to \mu^- \nu_\mathrm{e}) = \frac{G_\mathrm{F}^2}{\pi}\left(\frac{(s - m_\mu^2)^2}{s\left[1 + (s - m_\mu^2)/M_\mathrm{W}^2\right]}\right) \tag{13.1}$$

この式は高エネルギー ($\gg M_\mathrm{W}$) で $G_\mathrm{F}^2 M_\mathrm{W}^2/\pi = 1.08 \times 10^{-10}$ b に近づく§．これは繰り込み可能な理論であって量子補正を計算できる．高エネルギーになると量子補正も次第に (数パーセントの水準で) 重要になる．

この理論の最も明快な検証方法は，存在が推定されたゲージボゾン $\mathrm{W}^\pm$ および Z の確認であろう．これらのボゾン (ウィークボゾン) は 1983年に CERN において，540 GeV の重心系エネルギーを達成するように建造された陽子-反陽子衝突型加速器（コライダー）を用いて発見された．新たに見出された粒子の質量や崩壊の性質は，理論から推定されていたものとよく一致し，同定に成功した．ウィークボゾンの各質量は G_F と e と Weinberg 角 θ_W (式 (11.37)

§ (訳註) b は断面積の単位 barn (バーン) で，1 b = 10^{-28} m^2 である．

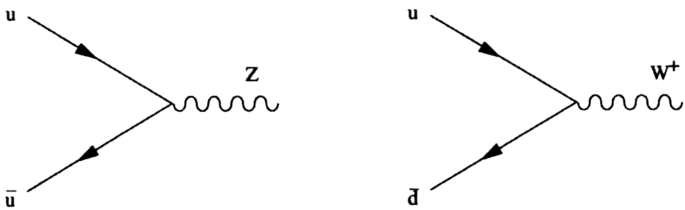


図13.1　クォーク-反クォーク消滅は，現在の陽子-反陽子衝突型加速器のエネルギーにおいて，W と Z の生成に寄与する主要な過程である．

と式 (12.22) 参照) に依存する．G_F と e の値はよく知られており，θ_W も中性カレント事象を注意深く観測することによって推定できる．我々は 12.3節で $e\nu_\mu \to e\nu_\mu$ と $e\bar{\nu}_\mu \to e\bar{\nu}_\mu$ の断面積が θ_W に敏感に依存することを見た．そして詳細は第 14 章で見ることになるが，これと同様に原子核による ν や $\bar{\nu}$ の散乱も θ_W に依存する．ニュートリノ-原子核散乱の実験で達成される重心系エネルギー値は，ニュートリノ-電子散乱の重心系エネルギーよりもはるかに高くなり (式 (9.13))，断面積はエネルギーに依存して増加するので，θ_W の推定値は原子核の中性カレント実験から与えられた．このとき得られた推定値は，現在受け入れられている値に非常に近いものであった．実験物理学者たちは，探すべき粒子の性質を知り得たのである！

ウィークボゾンの同定の成功は，これらの粒子の生成断面積の推定にも依存していた．我々はまだクォークの $W^\pm$ ボゾンや Z ボゾンとの相互作用を論じていないが，第 14 章においてレプトンの相互作用と似たものであることを見る予定である．Z と W^+ の生成に寄与する 2 つの過程を図13.1 に描いてある．衝突点から発生する陽子-反陽子反応の生成物は，元のビームの方向と強く相関する方向に，粒子群の複雑な噴射(ジェット)を形成する．幸いなことにウィークボゾンからの崩壊生成物は，しばしば他の粒子とよく分離するので，ボゾンの同定のために都合のよい状況となる (問題13.1)．

ウィークボゾンを生成するクォーク-反クォーク対(つい)に与えられるエネルギーは，供給される 540 GeV のうちの一部にすぎないが，この 540 GeV という設計値の下で初めてウィークボゾン生成の確認が可能になった．ビーム粒子の構成要素へのエネルギー配分に関する重要な解析を付録D で論じてある．

13.2 W$^\pm$ボゾンのレプトン化崩壊

上記のような CERN における実験結果と，それに続く他の実験によって，理論的なウィークボゾンの予想に対して，劇的な形で支持が与えられた．荷電 W$^\pm$ ボゾンの質量は，

$$M_{\mathrm{W}} = 80.33 \pm 0.15 \text{ GeV}$$

で，このボゾンのレプトン対への崩壊 (レプトン化崩壊（レプトニック） leptonic decay) の頻度の測定値は，

$$\Gamma(\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+\nu) = 224 \pm 15 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(\mathrm{W}^+ \to \mu^+\nu) = 215 \pm 19 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(\mathrm{W}^+ \to \tau^+\nu) = 226 \pm 27 \text{ MeV}$$

であった．なお $\Gamma(\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+\nu) = \Gamma(\mathrm{W}^- \to \mathrm{e}^-\bar{\nu})$ etc. である．

最低次の摂動において $(m_{\mathrm{lepton}}/M_{\mathrm{W}})^2$ の項を無視すると，標準模型の下でこれらの部分幅§は互いに等しく，

$$\Gamma(\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+\nu) = \frac{G_{\mathrm{F}} M_{\mathrm{W}}^3}{6\pi\sqrt{2}} = 226 \pm 1 \text{ MeV} \tag{13.2}$$

と推定される (問題 13.3)．これは実験値とよく一致している．

13.3 Zボゾンのレプトン化崩壊

W$^\pm$ ボゾンを検証した実験において電気的に中性の Z ボゾンも確認されたが，Z ボゾンの質量と崩壊頻度は，現在では W$^\pm$ ボゾンよりもはるかに正確に知られている．1989 年に 2 つの e$^+$e$^-$ 衝突型加速器（コライダー）が稼動を始めた．CERN の LEP と Stanford の SLC である‡．これらの加速器において，電子と陽電子は互いに等しいエネルギー，反対向きの運動量を与えられるが，その重心系エネルギーを Z の質量程度に調整できる．粒子生成の典型的な共鳴断面積を図 13.2 に，これに対応する Feynman ダイヤグラムを図 13.3 に示す．ピー

§ (訳註) 崩壊頻度 (単位時間における崩壊率) は，“幅” (width．エネルギー幅の意) とも呼ばれる．限定された崩壊モードに関する崩壊頻度を部分幅 (partial width) と呼ぶ．

‡ (訳註) LEP：Large Electron Positron collider．SLC：Stanford Linear Collider．

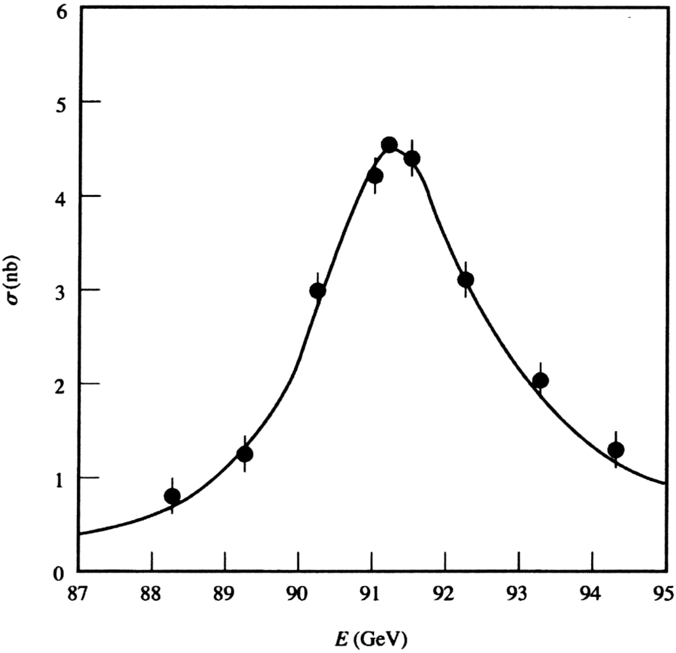


図13.2　断面積 $\sigma(e^+e^- \to e^+e^- + \mu^+\mu^- + \tau^+\tau^-)$ の，e^+e^- 衝突の重心系エネルギー E に対する依存性．この実験データは第25回国際高エネルギー物理会議 (Singapore, 1990年) において，CERN の ALEPH 共同研究チームが発表したものである．曲線は標準模型から予言される特性であるが，Z の質量などはデータに合うように調整してある (Hansen 1991).

クエネルギーにおける e^+e^- 消滅によって，静止した多量の Z ボゾンが生成される．この単純な事象から Z の性質に関する正確なデータが得られた．Z の質量は，

$$M_Z = 91.187 \pm 0.007 \text{ GeV}$$

であり，それぞれが荷電レプトン-反レプトン対(つい)に崩壊 (レプトン化崩壊(レプトニック)) する部分幅の値は次のように与えられた．

$$\Gamma(Z \to e^+e^-) = 83.82 \pm 0.30 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(Z \to \mu^+\mu^-) = 83.83 \pm 0.39 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(Z \to \tau^+\tau^-) = 83.67 \pm 0.44 \text{ MeV}$$

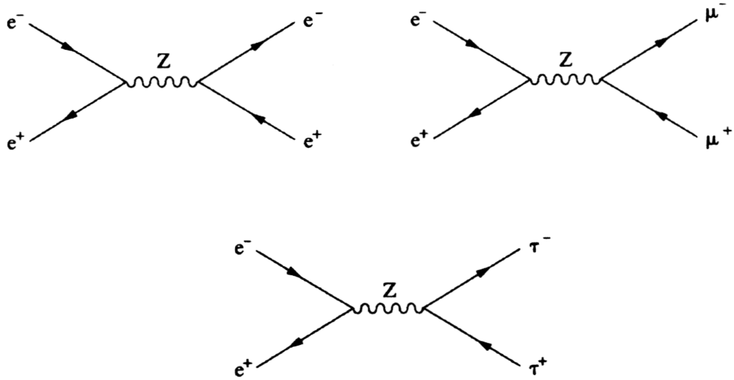


図13.3　図13.2の過程を記述する基本的なFeynmanダイヤグラム．特性曲線の計算には，これら以外にZの共鳴幅や電磁的過程を記述するダイヤグラムからの寄与も含まれている．

強粒子への崩壊と$\nu\bar{\nu}$対への崩壊も含んだZボソンの全崩壊幅 (total decay width) は，

$$\Gamma(\text{total}) = 2490 \pm 7\ \text{MeV}$$

であった．

荷電レプトン対への崩壊に関する部分幅の理論値はWeinberg角θ_{W}に依存する．最低次の摂動において$(m_{\text{lepton}}/M_{\text{Z}})^2$の項を無視すると，各部分幅はすべて等しく，

$$\Gamma(\text{Z} \to \text{e}^+\text{e}^-) = \frac{G_{\text{F}} M_{\text{Z}}^3}{12\sqrt{2}\pi}\left[(1 - 2\sin^2\theta_{\text{W}})^2 + 4\sin^4\theta_{\text{W}}\right] \tag{13.3}$$

と与えられる．Weinberg角について，認知されている値$\sin^2\theta_{\text{W}} = 0.2315$を用いると，

$$\Gamma(\text{Z} \to \text{e}^+\text{e}^-) = 83.4\ \text{MeV}$$

と算出されるが，ここでも理論値と実験値はよく一致している．

13.4 レプトンの世代数

Z ボソンのニュートリノ-反ニュートリノ対への崩壊頻度に関して，標準模型は，

$$\Gamma(\mathrm{Z} \to \nu_\mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}) = \Gamma(\mathrm{Z} \to \nu_\mu\bar{\nu}_\mu) = \Gamma(\mathrm{Z} \to \nu_\tau\bar{\nu}_\tau) = \frac{G_\mathrm{F} M_\mathrm{Z}^3}{12\sqrt{2}\pi} = 165.9 \text{ MeV} \tag{13.4}$$

という理論値を与える．したがって 3 種類のニュートリノ-反ニュートリノ対への崩壊を合わせた部分幅は，

$$3\Gamma(\mathrm{Z} \to \nu_\mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}) = 497.6 \text{ MeV}$$

と算出される．検出器で観測されずに逃避してしまう生成粒子はニュートリノと反ニュートリノだけなので，実験において生成粒子の飛跡を生じない $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 対の消滅に関する部分幅 $\Gamma(\text{invisible})$ が，上記の理論値に対応するはずである．

実験的には，

$$\Gamma(\text{invisible}) = 498.3 \pm 4.2 \text{ MeV}$$

であり，これが標準模型に基づく理論値とよく一致しているという事実は，模型の正当性を強く支持する．この結果の含意は，ニュートリノの種類は 3 つだけだということである．すなわち自然界におけるレプトン 2 重項は，既知の 3 世代に限られるということであって，標準模型の基本的な仮定を支持する重要な結果であると言える．

13.5 部分幅の測定

Z ボソン崩壊における部分幅の重要性を鑑み，実験結果から各部分幅を求める方法を簡単に説明しておくことにする．小角度の $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 弾性散乱は，Z 共鳴エネルギーの近傍であっても光子交換によるものが支配的であり，この過程は QED によってよく理解されている．ビーム粒子の小角度弾性散乱は，データ取得時に常時モニターされており，他の過程たとえば $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-$ などの断面積は，$\mu^+\mu^-$ の生成率と $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 小角度散乱率の比から算出される．

これが図13.2のようなグラフを得る基本的な方法である．各部分幅を導き出すための解析を，以下に簡略化した形で示してみよう．

それぞれの断面積のエネルギー依存性が，単純なBreit-Wigner(ブライト・ウィグナー)型の式で記述されるものと仮定する．

$$\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mu^+\mu^-) = \frac{3\pi}{M_\mathrm{Z}^2}\frac{\Gamma_\mathrm{ee}\Gamma_{\mu\mu}}{(E-M_\mathrm{Z})^2+\Gamma^2/4} \tag{13.5}$$

$$\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{hadrons}) = \frac{3\pi}{M_\mathrm{Z}^2}\frac{\Gamma_\mathrm{ee}\Gamma_\mathrm{had}}{(E-M_\mathrm{Z})^2+\Gamma^2/4} \tag{13.6}$$

(係数の3はスピン因子である．)

M_Zと全崩壊幅Γは，実験で得られるピークの位置と幅から決まる．そして$\Gamma_\mathrm{ee}=\Gamma_{\mu\mu}$と置くと，$E=M_\mathrm{Z}$における断面積$\sigma(\mathrm{e^+e} \to^- \mu^+\mu^-)$のピーク値から，式(13.5)を用いて$\Gamma_\mathrm{ee}/\Gamma$を算出できる．

$$\frac{\Gamma_\mathrm{ee}}{\Gamma} = \left(\frac{M_\mathrm{Z}^2\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mu\mu^- \ \text{ at } \ E=M_\mathrm{Z})}{12\pi}\right)^{1/2}$$

この結果に基づき，断面積$\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{hadrons})$のピーク値から崩壊幅の比$\Gamma_\mathrm{had}/\Gamma$を求めることができる．式(13.6)により，

$$\frac{\Gamma_\mathrm{had}}{\Gamma} = \frac{M_\mathrm{Z}^2}{12\pi}\frac{\Gamma}{\Gamma_\mathrm{ee}}\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{hadrons} \ \text{ at } \ E=M_\mathrm{Z})$$

と与えられる．Γ(invisible)を得るには次式を用いればよい．

$$\Gamma(\mathrm{invisible}) = \Gamma - 3\Gamma_\mathrm{ee} - \Gamma_\mathrm{had}$$

実際には上述の手順よりもはるかに注意深い方法で，データの処理が行われる．衝突過程における電磁的な効果を考慮すると，単純なBreit-Wigner型のピーク形からのずれが生じるので，実際の解析では，これに関する適切な補正が施される．

図13.4に示した3本の曲線は，このように洗練された方法により，質量のないニュートリノがそれぞれ2，3，4種類あるという仮定の下で理論的に予想される特性である．データは明らかに，ニュートリノが3種類あるという標準模型の想定を支持している．

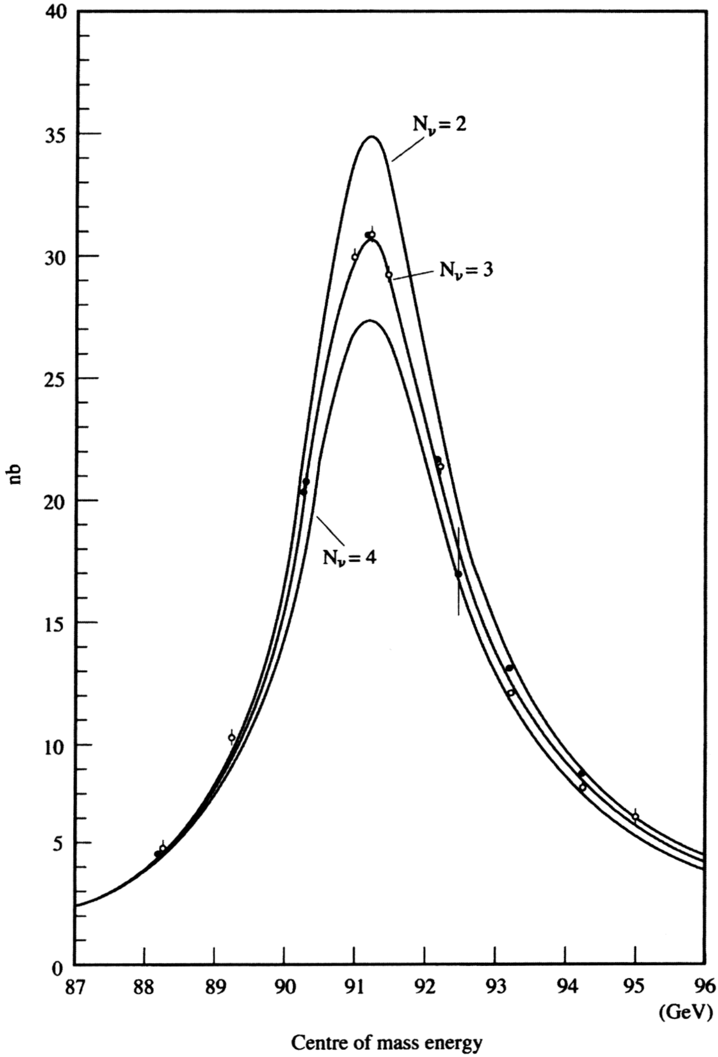


図13.4　断面積 $\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})$ の，e^+e^- 衝突の重心系エネルギー E に対する依存性．この実験結果は第25回国際高エネルギー会議 (Singapore, 1990年) において CERN の OPAL共同研究チームから発表された．ニュートリノが 2，3，4 種類あると仮定したそれぞれの理論曲線との比較を示してあるが，データにより明らかに，3 種類のニュートリノを想定するのが妥当である (Mori 1991 を参照)．

13.6 Zボソン生成の左右非対称とレプトン化崩壊の前後非対称

e^+e^-衝突型加速器(コライダー)を用いて，Weinberg-Salam理論が予言する他の特性を詳しく検証することもできる．StanfordのSLCで，ビームエネルギーをZボソンの質量に調整して多くの実験が行われた．SLCのビーム強度はCERNの加速器のビーム強度よりも弱いが，電子をビーム方向に偏極させて，正負のヘリシティを持つ電子の相対比率を変更できるという利点があった．我々は第7章で，高エネルギーにおいては，負のヘリシティを持つ電子と正のヘリシティを持つ陽電子が左手型の場に関与し，正のヘリシティを持つ電子と負のヘリシティを持つ陽電子が右手型の場に関与することを見た．式(12.23)に示してあるWeinberg-Salamラグランジアンの相互作用カレントの形から，非偏極の陽電子ビーム(正負のヘリシティを持つ陽電子を等量ずつ含む)との相互作用において，負のヘリシティを持つ電子によるZ生成断面積σ_{L}は$(\cos 2\theta_{\mathrm{W}})^2$に比例し，正のヘリシティを持つ電子によるZ生成断面積σ_{R}は$(2\sin^2\theta_{\mathrm{W}})^2$に比例することが見てとれる．比例係数は共通なので，左右の生成断面積の非対称は，最低次で次のように与えられる．

$$A_{\mathrm{LR}} = \frac{\sigma_{\mathrm{L}} - \sigma_{\mathrm{R}}}{\sigma_{\mathrm{L}} + \sigma_{\mathrm{R}}} = \frac{(\cos 2\theta_{\mathrm{W}})^2 - (2\sin^2\theta_{\mathrm{W}})^2}{(\cos 2\theta_{\mathrm{W}})^2 + (2\sin^2\theta_{\mathrm{W}})^2} = \frac{2(1-4\sin^2\theta_{\mathrm{W}})}{1+(1-4\sin^2\theta_{\mathrm{W}})^2}$$

SLCでの実験結果(Fero 1994)によると$A_{\mathrm{LR}} = 0.1628 \pm 0.0099$であった．ここから，

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.2292 \pm 0.0013$$

と算出される．この過程には$\mathrm{W}^{\pm}$ボソンが含まれないので，この推定はウィークボソンの質量比$M_{\mathrm{W}}/M_{\mathrm{Z}}$に依存しない．

CERNやHamburgのDESY(デーズィ)研究所において，以前のe^+e^-衝突型加速器(コライダー)で得られた電子ビームは，縦方向の偏極を持たないものであった．しかし，もしZボソンが形成されれば，そのスピンの向きが元の電子ビームの方向に一致する確率は$[2\sin^2\theta_{\mathrm{W}}]^2$，反対向きになる確率は$[\cos 2\theta_{\mathrm{W}}]^2$であって，ビーム方向に平均偏極$-A_{\mathrm{LR}}$を持つことになる．

Zボソンがレプトン-反レプトン対(つい)に崩壊するとき，レプトンが発生する方向はZボソンのスピン方向と相関を持つ．したがってZボソンの偏極は，発

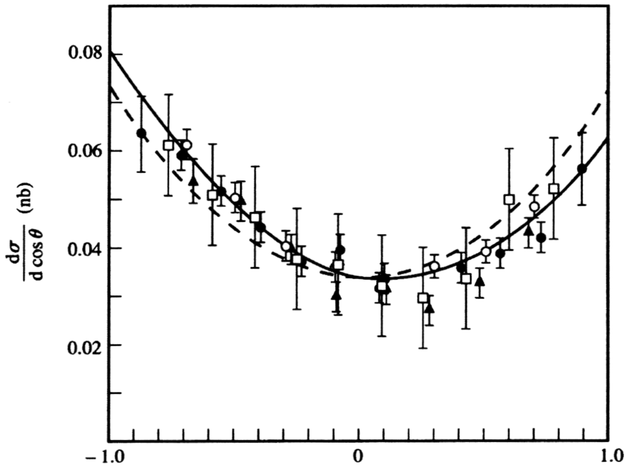


図 13.5　微分断面積 $d\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)/d\cos\theta$ の角度依存性．このデータは DESY で重心系エネルギー 30 GeV の e^+e^- 衝突実験から得られたものである．破線は量子電磁力学だけを用いた理論計算，実線は Z ボゾンの寄与も考慮した計算結果である．実験データは後者に合致している．(R. Marshall, Rutherford Appleton Laboratory Report RAL 89-021.)

生するレプトンの角度分布の前後非対称 (forward-backward asymmetry) を生じるはずである．

これと競合する電磁相互作用によるレプトン生成過程は，対称な角度分布を与える．観測される角度分布の非対称性は，Z 過程と γ 過程の干渉の結果として現れるもので，エネルギーにも依存する．図 13.5 に重心系エネルギー $E = 30$ GeV (M_Z 以下である) の e^+e^- 衝突から発生したレプトンの電子ビームに対する角度分布を示す．このデータは DESY において取得されたもので，ここから $\sin^2\theta_W = 0.212 \pm 0.014$ と推定される．これも Weinberg-Salam 理論の総体的な整合性を支持する，印象的な結果となっている．

練習問題　(＊解法とヒント p.298)

*13.1　高エネルギーの陽子ビームと反陽子ビームを対向させて衝突を起こすと $W^\pm$ ボゾンが生成される．W ボゾンの運動量はビーム方向に沿う傾向が強く，横

方向の運動量成分は小さい．この横方向成分を無視し，W の静止系において W の崩壊から生成する荷電レプトンとニュートリノが等方的に分布するものと仮定すると，生成されるレプトンの横方向運動量の自乗平均平方根が近似的に $M_{\mathrm{W}}/\sqrt{6} = 33$ GeV となることを示せ．

横方向に大きな運動量を生じる事象は稀であり，これを観測することによって W の生成が確認できる．(横方向の運動量は，W のビーム方向への Lorentz 等速推進(ブースト)に関して不変であることに注意せよ．)

***13.2** 式 (12.23) の中の Z ボゾンと電子-陽電子対の相互作用を表す項から，対向する非偏極の $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ ビーム衝突から生ずる Z ボゾンのスピンの向きが，電子ビーム方向に一致する確率は $(2\sin^2\theta_{\mathrm{W}})^2$，反対向きになる確率は $(\cos 2\theta_{\mathrm{W}})^2$ であることを示せ．

***13.3** レプトンの質量項を無視して，各部分幅 (13.2)，(13.3)，(13.4) を導出せよ．

***13.4** 式 (13.3) を $\cos\theta_{\mathrm{W}} = M_{\mathrm{W}}/M_{\mathrm{Z}}$ によって計算し直してみよ．

第 **14** 章

クォークの電弱相互作用

標準模型における強い相互作用の源はクォークの“色”(色電荷)である．しかし本章ではクォークに関して，ひとまず電磁相互作用と弱い相互作用だけを考察し，色の問題は棚上げにする．クォークの電弱理論は第 12 章におけるレプトンの電弱理論と非常によく似た方法で構築される．しかしこの理論は，レプトンの場合ほど行き届いた実験検証が行われていない．クォークを強粒子(ハドロン)から孤立させることが不可能だからである．実験はクォークの複合系に対するものに限られ，基礎的ラグランジアン密度は低エネルギーでは，強い相互作用のために曖昧なものになる．しかし高エネルギー領域において，特に Z ボゾンの強粒子化(ハドロニック)崩壊を通じて，単独のクォークに関する電弱相互作用の物理をある程度まで確認できる．このような崩壊に関する実験データは，次の第 15 章で紹介する予定である．

14.1　ラグランジアン密度の構築

低エネルギーにおいて，理論は，

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

のような崩壊を記述しなければならない．あるいはクォークの水準で，

$$\mathrm{d} \to \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

のような崩壊が対象となる．この崩壊はWボゾンによって媒介される．同じくWボゾンによって媒介されるミュー粒子の崩壊，

$$\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

と比較すると，クォーク場の左手型成分 u_L と d_L を一緒にして $SU(2)$ 2重項を形成するのが妥当と考えられる．

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} u_\mathrm{L} \\ d_\mathrm{L} \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

u_R と d_R については，e_R と同様に $SU(2)$ 変換の下で不変とする．この単純な割り当て方は，自然界にあるu型クォークとd型クォークがそれぞれ1種類だけと仮想する場合の措置に過ぎないことを，すぐ後で見ることになる．

上記の割り当ての下で弱い相互作用の構築方法に自由度はない．クォークに関するラグランジアン密度の力学的な部分をゲージ不変にする方法はひとつだけである．場 $\mathbf{W}_\mu$ への結合は $SU(2)$ 対称性によって一意的に決まり，場 B_μ への結合はuクォークの電荷が $2e/3$，dクォークの電荷が $-e/3$ という条件によって固定される．その結果は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{dyn} = \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}\big[\partial_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\mu + (\mathrm{i}g_1/6)B_\mu\big]\mathbf{L} \\ + u_\mathrm{R}^\dagger\sigma^\mu \mathrm{i}\big[\partial_\mu + (2\mathrm{i}g_1/3)B_\mu\big]u_\mathrm{R} \\ + d_\mathrm{R}^\dagger\sigma^\mu \mathrm{i}\big[\partial_\mu - (\mathrm{i}g_1/3)B_\mu\big]d_\mathrm{R}\end{aligned} \tag{14.2}$$

となる．ここで $g_2\sin\theta_\mathrm{W} = g_1\cos\theta_\mathrm{W} = e$ である．

ゲージ場の変換則 (11.4b) および (11.6) と整合するように，クォーク場の $U(1)\times SU(2)$ 変換は，次のようでなければならない．

$$\begin{aligned}&\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)/3}\mathbf{UL} \\ &u_\mathrm{R} \to u'_\mathrm{R} = \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta(x)/3}u_\mathrm{R} \\ &d_\mathrm{R} \to d'_\mathrm{R} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta(x)/3}d_\mathrm{R}\end{aligned} \tag{14.3}$$

式 (11.17) と式 (11.29) に従い，$\mathcal{L}_\mathrm{dyn}$ を $W_\mu^\pm$，Z_μ，A_μ を用いて書き直すと次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm dyn} = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu {\rm i} &\begin{pmatrix} \partial_\mu + \frac{2{\rm i}e}{3}A_\mu + \frac{{\rm i}e}{3\sin 2\theta_{\rm w}}(1+2\cos 2\theta_{\rm w})Z_\mu, & \frac{{\rm i}e}{\sqrt{2}\sin\theta_{\rm w}}W_\mu^+ \\ \frac{{\rm i}e}{\sqrt{2}\sin\theta_{\rm w}}W_\mu^-, & \partial_\mu - \frac{{\rm i}e}{3}A_\mu - \frac{{\rm i}e}{3\sin 2\theta_{\rm w}}(2+\cos 2\theta_{\rm w})Z_\mu \end{pmatrix}\mathbf{L} \\ &+ u_{\rm R}^\dagger \sigma^\mu {\rm i}\left[\partial_\mu + \frac{2{\rm i}e}{3}A_\mu - \frac{2{\rm i}e}{3}\tan\theta_{\rm W} Z_\mu\right]u_{\rm R} \\ &+ d_{\rm R}^\dagger \sigma^\mu {\rm i}\left[\partial_\mu - \frac{{\rm i}e}{3}A_\mu + \frac{{\rm i}e}{3}\tan\theta_{\rm W} Z_\mu\right]d_{\rm R}\end{aligned} \tag{14.4}$$

しかしながら標準模型は，クォークの組合せが 3 世代 (3 家族) あることを想定している．したがって我々は，3 組の左手型 $SU(2)$ 2 重項，

$$\begin{pmatrix} u_{\rm L1} \\ d_{\rm L1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{\rm L2} \\ d_{\rm L2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{\rm L3} \\ d_{\rm L3} \end{pmatrix}$$

と，6 つの右手型 1 重項 $u_{\rm R1}$，$d_{\rm R1}$；$u_{\rm R2}$，$d_{\rm R2}$；$u_{\rm R3}$，$d_{\rm R3}$ を導入する．更に簡便な記述のために，これらを次のように書くことにする．

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} u_{{\rm L}k} \\ d_{{\rm L}k} \end{pmatrix}, \quad u_{{\rm R}k}, \quad d_{{\rm R}k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

レプトンの場合と同様に，全クォークのラグランジアンの力学的な部分を，各世代に関する和の形で表す．

$$\mathcal{L}_{\rm dyn}({\rm quark}) = \sum_{k=1}^{3} \mathcal{L}_{\rm dyn}(u_k, d_k) \tag{14.5}$$

14.2　クォークの質量と小林-益川混合行列

繰り込み可能性を得るためにはゲージ対称性を導入しなければならないし，第 12 章で荷電レプトンに質量を与えたのと同じように，クォークにも質量を付与するためにクォークを Higgs 場と結合させなければならない．d_k クォークに関して，この作業は素直に行える．ゲージ対称性を保持する最も一般的な形が，

$$\mathcal{L}_{\rm Higgs}({\rm d}) = -\sum \left[G_{ij}^d(\mathbf{L}_i^\dagger \Phi)d_{{\rm R}j} + G_{ij}^{d*}d_{{\rm R}j}^\dagger(\Phi^\dagger \mathbf{L}_i)\right] \tag{14.6}$$

となるのは 12.6 節に示した通りである．Higgs 場 Φ の対称性が破れた後に，この結合は d 型クォークに，次のように質量を付与する．

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(\text{d}) = -\phi_0 \sum \left[G^d_{ij} d^\dagger_{\text{L}i} d_{\text{R}j} + G^{d*}_{ij} d^\dagger_{\text{R}j} d_{\text{L}i} \right] \tag{14.7}$$

ここでは G^d_{ij} を“先験的に（ア・プリオリ）”任意の 3×3 行列と置く．12.6節で指摘したように，このような行列は常に 2 つのユニタリー行列によって実対角行列に変換できるので，次のように書ける．

$$\phi_0 \mathbf{G}^d = \mathbf{D}^\dagger_{\text{L}} \mathbf{m}^d \mathbf{D}_{\text{R}}$$

$\mathbf{m}^d$ は実対角行列，$\mathbf{D}_{\text{L}}$ と $\mathbf{D}_{\text{R}}$ はユニタリー行列である．もし対角要素が互いに異なっていれば (実験的にはそのようになる) $\mathbf{D}_{\text{L}}$ と $\mathbf{D}_{\text{R}}$ はそれぞれ左から，次のような同じ位相因子行列を掛けることのできる自由度を除いて一意的に決まる．

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix} \tag{14.8}$$

標準模型の電弱部分において，ニュートリノの質量はゼロと仮定されている．しかしここで，左手型 2 重項を形成する u 型クォークに関しては，質量項が必要となる．2 つの 2 重項 Φ と $\mathbf{L}_i$ から構築できる $SU(2)$ 不変な表現として適切なものは $\varepsilon_{ab}\Phi_a L_{ib}$ である ($\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0$，$\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1$．問題 14.3 参照)．そこで次のように置く．

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(\text{u}) = \sum \left[G^u_{ij} (\varepsilon_{ab} L^\dagger_{ib} \Phi^\dagger_a) u_{\text{R}j} + G^{u*}_{ij} u^\dagger_{\text{R}j} (\varepsilon_{ab} \Phi_a L_{ib}) \right] \tag{14.9}$$

G^u_{ij} は，もうひとつ別に導入した複素 3×3 行列である．系が自発的に対称性を破ると，上式は次のような u 型クォークの質量項になる．

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}(\text{u}) = -\phi_0 \sum \left[G^u_{ij} u^\dagger_{\text{L}i} u_{\text{R}j} + G^{u*}_{ij} u^\dagger_{\text{R}j} u_{\text{L}i} \right] \tag{14.10}$$

これは理論のゲージ対称性を保持しながら，期待通りに式 (14.7) と同様の形を与えている．実対角行列への変換も同じように行える．

$$\phi_0 \mathbf{G}^u = \mathbf{U}^\dagger_{\text{L}} \mathbf{m}^u \mathbf{U}_{\text{R}}$$

$\mathbf{U}_{\text{L}}$ と $\mathbf{U}_{\text{R}}$ はユニタリー行列，$\mathbf{m}^u$ は実対角行列である．

$\mathbf{U}_{\text{L}}$ と $\mathbf{U}_{\text{R}}$ それぞれに左から，次のような同じ位相因子行列を掛けてもよい．

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_3} \end{pmatrix}$$

質量行列を対角行列にするような“真の”クォーク場 (‘true’ quark field) を採用することで，最も直接的な理論の記述が可能となる．そこで次のように 6 つのクォーク場を定義する．

$$\begin{aligned} d'_{\mathrm{L}i} &= D_{\mathrm{L}ij} d_{\mathrm{L}j}, \quad d'_{\mathrm{R}i} = D_{\mathrm{R}i} d_{\mathrm{R}j} \\ u'_{\mathrm{L}i} &= U_{\mathrm{L}ij} u_{\mathrm{L}j}, \quad u'_{\mathrm{R}i} = U_{\mathrm{R}ij} u_{\mathrm{R}j} \end{aligned} \tag{14.11}$$

そうすると，$\mathcal{L}$ へのクォーク質量項の寄与は次のように書かれる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mass}}(\mathrm{quarks}) = -\sum_{i=1}^{3} \left[m_i^d (d'^{\dagger}_{\mathrm{L}i} d'_{\mathrm{R}i} + d'^{\dagger}_{\mathrm{R}i} d'_{\mathrm{L}i}) + m_i^u (u'^{\dagger}_{\mathrm{L}i} u'_{\mathrm{R}i} + u'^{\dagger}_{\mathrm{R}i} u'_{\mathrm{L}i}) \right] \tag{14.12a}$$

ここで u，c，t クォークを，それぞれ，

$$\begin{pmatrix} u'_{\mathrm{L}1} \\ u'_{\mathrm{R}1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'_{\mathrm{L}2} \\ u'_{\mathrm{R}2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'_{\mathrm{L}3} \\ u'_{\mathrm{R}3} \end{pmatrix}$$

という Diracスピノルに同定し，d，s，b クォークをそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} d'_{\mathrm{L}1} \\ d'_{\mathrm{R}1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d'_{\mathrm{L}2} \\ d'_{\mathrm{R}2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d'_{\mathrm{L}3} \\ d'_{\mathrm{R}3} \end{pmatrix}$$

という Diracスピノルに同定する．すると式 (14.12a) は次のように書き直される．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{mass}}(\mathrm{quarks}) = &-\left[m^d (d^{\dagger}_{\mathrm{L}} d_{\mathrm{R}} + d^{\dagger}_{\mathrm{R}} d_{\mathrm{L}}) + m^u (u^{\dagger}_{\mathrm{L}} u_{\mathrm{R}} + u^{\dagger}_{\mathrm{R}} u_{\mathrm{L}}) \right] \\ &-\left[m^s (s^{\dagger}_{\mathrm{L}} s_{\mathrm{R}} + s^{\dagger}_{\mathrm{R}} s_{\mathrm{L}}) + m^c (c^{\dagger}_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{R}} + c^{\dagger}_{\mathrm{R}} c_{\mathrm{L}}) \right] \\ &-\left[m^b (b^{\dagger}_{\mathrm{L}} b_{\mathrm{R}} + b^{\dagger}_{\mathrm{R}} b_{\mathrm{L}}) + m^t (t^{\dagger}_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{R}} + t^{\dagger}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{L}}) \right] \end{aligned} \tag{14.12b}$$

式 (14.12b) の各項が，6 つの Diracフェルミオンに対応する．

プライム記号は省いた．ここから先は，真のクォーク場の方を u_k および d_k $(k = 1, 2, 3)$ と書くことにする．

式 (14.2) と式 (14.5) で与えられた $\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ の中で，“対角項”は u型クォー

クとd型クォークを混合せず，ユニタリー変換 (14.11) の下で不変である．しかし行列 $\mathbf{W}_\mu$ の非対角要素から生じる項は，$\mathrm{W}^\pm$ ボゾン場を通じて u型とd型のクォークを混合し，これらは大きな変更を受ける．

対角項から，第 12 章のレプトン理論における式 (12.12) と式 (12.23) に相当する $\mathcal{L}_{\mathrm{qDirac}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{qZ}}$ が得られる．クォークに関する完全な電弱ラグランジアン密度は，次のように書かれる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q}} = \mathcal{L}_{\mathrm{qDirac}} + \mathcal{L}_{\mathrm{qZ}} + \mathcal{L}_{\mathrm{qW}} + \mathcal{L}_{\mathrm{qH}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{qDirac}} = \sum_i \Big[& u^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}\Big\{\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{2e}{3}A_\mu\Big\}u_{\mathrm{L}i} + u^\dagger_{\mathrm{R}i}\sigma^\mu \mathrm{i}\Big\{\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{2e}{3}A_\mu\Big\}u_{\mathrm{R}i} \\ & + d^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}\Big\{\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{e}{3}A_\mu\Big\}d_{\mathrm{L}i} + d^\dagger_{\mathrm{R}i}\sigma^\mu \mathrm{i}\Big\{\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{e}{3}A_\mu\Big\}d_{\mathrm{R}i}\Big] \\ & + \mathcal{L}_{\mathrm{q\,mass}} \end{aligned} \tag{14.13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{qZ}} = \sum_i \Big[& -u^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu u_{\mathrm{L}i}\left(\frac{e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right)Z_\mu\big(1-(4/3)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\big) \\ & + u^\dagger_{\mathrm{R}i}\sigma^\mu u_{\mathrm{R}i}\left(\frac{e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right)Z_\mu\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}} \\ & + d^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu d_{\mathrm{L}i}\left(\frac{e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right)Z_\mu\big(1-(2/3)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\big) \\ & - d^\dagger_{\mathrm{R}i}\sigma^\mu d_{\mathrm{R}i}\left(\frac{e}{\sin(2\theta_{\mathrm{W}})}\right)Z_\mu\frac{2}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\Big] \end{aligned} \tag{14.14}$$

ラグランジアン密度の $\mathcal{L}_{\mathrm{qW}}$ の部分の，

$$-\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_{\mathrm{W}}}\sum_i\big[u^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu d_{\mathrm{L}i}W^+_\mu + d^\dagger_{\mathrm{L}i}\tilde{\sigma}^\mu u_{\mathrm{L}i}W^-_\mu\big]$$

という項を，式 (14.11) で与えられる“真のクォーク場”によって書き直すと，次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{qW}} = -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_{\mathrm{W}}}(u^\dagger_{\mathrm{L}}, c^\dagger_{\mathrm{L}}, t^\dagger_{\mathrm{L}}) & \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu d_{\mathrm{L}} \\ \tilde{\sigma}^\mu s_{\mathrm{L}} \\ \tilde{\sigma}^\mu b_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} W^+_\mu \\ & + [\text{Hermite共役}] \end{aligned} \tag{14.15}$$

ここで $\mathbf{V} = \mathbf{U}_{\mathrm{L}}\mathbf{D}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ である．

ユニタリー行列同士の積はユニタリー行列になるので，$\mathbf{V}$ は 3×3 ユニタリー行列である．$\mathbf{V}$ の行列要素は理論の内部からは決まらない．標準模型におけるパラメーターのうちの 4 つは，この行列に含まれている．$n \times n$ ユニタリー行列は n^2 個の要素によって表されるので (付録A)，見かけ上，実験的に測定されるパラメーターは 9 個ある．しかしこれらの中の 5 つは $\mathbf{D}_{\mathrm{L}}$ と $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$ に関係する位相因子行列 (式 (14.8) 参照) を通じて，物理的な意味を持たないクォーク場の位相へと吸収させることができる．($\mathbf{V}$ の中には位相の差だけが現れるので，物理的な意味を持たない位相は 6 個ではなく 5 個である．たとえば $V_{\mathrm{ud}} = \exp\left[\mathrm{i}(\beta_{\mathrm{u}} - \alpha_{\mathrm{d}})\right] V_{\mathrm{ud}}^{0}$ となる．)

クォークの位相因子を除いた後の行列 $\mathbf{V}^0$ は 4 つの物理パラメーターに依存する．これは“小林-益川 (KM) 行列”と呼ばれている (Kobayashi and Maskawa 1973)．

14.3　KM行列のパラメーター表示

3×3 回転行列はユニタリー行列である．もっと一般的なユニタリー行列は，回転行列と，対角位相因子から成るユニタリー行列の積によって構築できる．しかしこの方法で KM 行列を一意的にパラメーター表示できるわけではない．Particle Data Group が提唱しているパラメーター表示の方法は，次の通りである．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta/2} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{14.16}
$$

上式において $c_{ij}=\cos\theta_{ij}$，$s_{ij}=\sin\theta_{ij}$ である．3 つの回転角 θ_{12}，θ_{23}，θ_{13} と位相角 δ が，4 つのパラメーターにあたる．

もし $s_{13}=0$ もしくは $\sin\delta=0$ であれば，$\mathbf{V}$ は明らかに実行列である．また，これほど自明ではないが，$s_{12}=0$ であれば，クォーク場を次のように再定義することによって $\mathbf{V}$ を実行列にすることができる．

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}u_1 \to u_1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}d_1 \to d_1$$

$s_{23}=0$ の場合も，次のような再定義によって $\mathbf{V}$ を実行列にできる．

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}u_3 \to u_3, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}d_3 \to d_3$$

上記の実行列化は，読者各位において確認してもらいたい．

一般のクォーク位相の再定義，

$$d_i \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i}d_i, \quad u_i \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_i}u_i$$

によって，$\mathbf{V}$ の行列要素は次のような変更を受ける．

$$V_{ij} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_i-\beta_j)}V_{ij} \tag{14.17}$$

この自由度を用いて，3 つの回転角すべてを第 1 象限に収めることができる．

Jarlskog (1985) は，あるユニタリー行列 $\mathbf{V}$ が与えられたとき，それが上述のような方法で実行列化できるかどうかを判定するための必要充分条件を提示した．彼女は 9 通りの積 $V_{ij}V_{kl}V_{kj}^*V_{il}^*$ $(i\neq k,\ j\neq l)$ の任意のひとつの虚部，たとえば，

$$\mathrm{Im}(V_{11}V_{22}V_{21}^*V_{12}^*)=J \text{（と名づける．）} \tag{14.18}$$

という量に着目した．J は一般の位相変更 (14.17) の下で不変なので，もし J がゼロでないならば，それをゼロにすることは不可能であり，したがって $\mathbf{V}$ は実行列にならない．9 通りの量はいずれも $\pm J$ となる．式 (14.16) のパラメーターを用いるならば，

$$J=c_{12}c_{13}^2c_{23}s_{12}s_{13}s_{23}\sin\delta \tag{14.19}$$

と表される．(先ほど示した KM 行列を実行列にするそれぞれの条件は，$J=0$ という条件に含まれている．)

14.4　CP対称性とKM行列

ここで，もしクォークの位相を再定義してもKM行列を実行列にできないならば，標準模型はCP (荷電共役・パリティ) 対称性を破るということを示してみる．

12.5節では，レプトンに関する Weinberg-Salam の電弱理論がCP操作の下で不変であることを見た．同様に標準模型の中でクォークの電弱相互作用に関する部分も概ね各項がCP対称性を持つが，クォークと W ボゾンの相互作用を表す項だけは例外となる．KM行列を含む項がこれに該当する．

W場のCP変換は，式 (12.32) に定義されているように，

$$W_0^{+CP} = -W_0^-, \quad W_i^{+CP} = W_i^-$$

であり，クォーク場はすべてのフェルミオン場に共通した，

$$q_{\rm L}^{CP} = -{\rm i}\sigma^2 q_{\rm L}^*, \quad q_{\rm R}^{CP} = {\rm i}\sigma^2 q_{\rm R}^*$$

という変換をする．CP対称性がどのように破られるかを見るために，式 (14.15) をまず次のように書き直す．

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_{\rm W}\right)\sum_{i,j}\left[u_{{\rm L}i}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu V_{ij}d_{{\rm L}j}W_\mu^+ + d_{{\rm L}j}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu V_{ij}^* u_{{\rm L}i}W_\mu^-\right]$$
$$(i = {\rm u, c, t};\ j = {\rm d, s, b})$$

それぞれの場をCP変換すると，

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_{\rm W}\right)\sum_{i,j}\left[-u_{{\rm L}i}^{\rm T}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\rm T} V_{ij}d_{{\rm L}j}^* W_\mu^- - d_{{\rm L}j}^{\rm T}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\rm T} V_{ij}^* u_{{\rm L}i}^* W_\mu^+\right]$$

となる．上式には 12.5節と同様に，

$$(\sigma^2)^2 = \mathbf{I}, \quad \sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -(\sigma^i)^{\rm T}$$

という関係を用いた．スピノル添字に注意しながら転置を施すと，フェルミオンの反交換場から負号が生じ，CP変換後の式は次のようになる．

$$\left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_{\rm W}\right)\sum_{i,j}\left[d_{{\rm L}j}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu V_{ij}u_{{\rm L}i}W_\mu^- + u_{{\rm L}i}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu V_{ij}^* d_{{\rm L}j}W_\mu^+\right]$$

これが変換前の式と一致する唯一の条件は，すべてのi，jに関してV_{ij}が実

数になることである.

CP 対称性の破れに関する実験的な証拠は，1964年の K^0 中間子 (d$\bar{\mathrm{s}}$) 崩壊実験において得られた．この現象とその含意については第18章で触れるが，そこではKM行列のパラメーターについて実験的に既知の事柄を考察する予定である．標準模型における CP 非対称の効果が J に比例するという事実は興味深い.

14.5　低エネルギー極限における弱い相互作用

標準模型においてWボゾンの完全な相互作用，すなわちレプトンおよびクォーク両方との相互作用を表す完全な式は，第12章の結果 (式 (12.18)) と本章の結果 (式 (14.15)) を合わせて次のように与えられる.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Wint}} = \left(-e/\sqrt{2}\sin\theta_{\mathrm{W}}\right)\left[j^{\mu\dagger}W_{\mu}^{+} + j^{\mu}W_{\mu}^{-}\right]$$

$$j^{\mu} = \sum_{\text{leptons}} \mathrm{e}_{\mathrm{L}l}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{L}l} + \sum_{i,j} d_{\mathrm{L}j}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}u_{\mathrm{L}i}V_{ij}^{*} \quad (i = \mathrm{u,c,t};\ j = \mathrm{d,s,b}) \tag{14.20}$$

ただし本章ではクォークの色の添字を省いてあることを思い出してもらいたい．式 (14.15) におけるクォークスピノルの添字 i，j は，暗に色の添字も含んでおり，これに関しても和を取るものと見なければならない.

12.2節のようにして W 場を消去すると，低エネルギーにおける実効的な相互作用の式が得られる.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Weff}} = -2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}j_{\mu}^{\dagger}j^{\mu} \tag{14.21}$$

たとえば，この実効的な相互作用の中で原子核の β 崩壊を記述するのは，電子場およびuクォークとdクォーク $(i = j = 1)$ の場を含む次のような部分である.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = &-2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}\left[g_{\mu\nu}\nu_{\mathrm{eL}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}d_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}u_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{ud}}^{*}\right]\\ &+[\text{Hermite共役}]\end{aligned} \tag{14.22}$$

また $K^0 \to \pi^+\pi^-$ $(\bar{\mathrm{s}} \to \mathrm{u} + \bar{\mathrm{u}} + \bar{\mathrm{d}})$ という崩壊を記述する実効的な相互作用は，次の通りである.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -2\sqrt{2}G_{\text{F}}\left[g_{\mu\nu}s_{\text{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}u_{\text{L}}u_{\text{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}d_{\text{L}}V_{\text{us}}^{*}V_{\text{ud}}\right] \tag{14.23}$$

Zボゾンとすべての基本フェルミオンとの相互作用を表す完全な式を得ることもできる．式 (12.23) と式 (14.14) を組み合わせると，

$$\mathcal{L}_{\text{Zint}} = \frac{-e}{\sin(2\theta_{\text{W}})}(j_{\text{neutral}})_{\mu}Z^{\mu} \tag{14.24}$$

$$\begin{aligned}(j_{\text{neutral}})^{\mu} = &\sum_{\text{leptons}}\left[\nu_{\text{L}l}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\text{L}l} - \cos(2\theta_{\text{W}})\text{e}_{\text{L}l}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\text{e}_{\text{L}l} + 2\sin^2\theta_{\text{W}}\text{e}_{\text{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\text{e}_{\text{R}}\right]\\ &+\sum_{i}\left[u_{\text{L}i}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}u_{\text{L}i}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\text{W}}\right) - u_{\text{R}i}^{\dagger}\sigma^{\mu}u_{\text{R}i}\left(\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\text{W}}\right)\right.\\ &\left.-d_{\text{L}i}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}d_{\text{L}i}\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_{\text{W}}\right) + d_{\text{R}i}^{\dagger}\sigma^{\mu}d_{\text{R}i}\left(\frac{2}{3}\sin^2\theta_{\text{W}}\right)\right]\end{aligned}$$

となる．Z 場を消去すると，低エネルギーにおける実効的な相互作用の式が得られる．

$$\mathcal{L}_{\text{Zeff}} = -\left(G_{\text{F}}/\sqrt{2}\right)(j_{\text{neutral}})_{\mu}(j_{\text{neutral}})^{\mu} \tag{14.25}$$

練習問題　(＊解法とヒント p.300)

14.1 クォーク場の変換 (14.3) とゲージ場の変換 (11.4b) および (11.6) を共に施すと，クォークの $\mathcal{L}_{\text{dyn}}$ (式 (14.4)) は不変に保たれることを示せ．

14.2 式 (14.4) から $\mathcal{L}_{\text{qZ}}$ (式 (14.14)) を抽出せよ．

***14.3** $\varepsilon_{ab}\Phi_a L_b$ が $SU(2)$ 不変量であることを示せ．($\varepsilon_{ab}U_{ac}U_{bd} = \varepsilon_{cd}\text{det}\mathbf{U}$ の関係に注意．)

***14.4** 式 (14.6) と式 (14.9) に現れるクォークと Higgs 実スカラー場の相互作用ラグランジアン密度を書き下してみよ．Higgs 実スカラー場と t クォークの結合定数 c_{t} を推定せよ．

***14.5** 式 (14.20) と式 (14.21) から，以下の中間子崩壊に関わる項を見いだせ．

$$\begin{aligned}&\text{K}^{+}(\text{u}\bar{\text{s}}) \to \mu^{+} + \nu_{\mu}\\ &\text{D}^{+}(\text{c}\bar{\text{d}}) \to \overline{\text{K}^{0}}(\bar{\text{d}}\text{s}) + \text{e}^{+} + \nu_{\text{e}}\\ &\text{B}^{+}(\text{u}\bar{\text{b}}) \to \overline{\text{D}^{0}}(\bar{\text{c}}\text{u}) + \pi^{+}(\text{u}\bar{\text{d}})\end{aligned}$$

それぞれの崩壊を表す適切なクォークのダイヤグラムを描いてみよ．

*14.6 “中性カレントは香りを変えない”．すなわち式 (14.24) の中性カレントにクォークの香りを変える項は含まれていない．高次の摂動を考えて，香りを変えてしまう次のような中性の崩壊過程を説明する Feynman ダイヤグラムを描いてみよ．

$$\mathrm{b} \to \mathrm{s} + \gamma, \quad \mathrm{b} \to \mathrm{s} + \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$$

第 **15** 章

ウィークボゾンの強粒子化崩壊

e^+e^-衝突型加速器(コライダー)による Z ボゾンのレプトン化崩壊(レプトニック)の実験結果を第 13 章で紹介した．これらの結果は Weinberg-Salam の電弱理論の予言と非常によく一致した．本章では主として Z ボゾンや $W^{\pm}$ ボゾンの強粒子化崩壊(ハドロニック) (hadronic decay) について CERN や SLAC(スラック)§で蓄積された豊富なデータの一部を考察し，やはり理論と実験の結果がよく一致することを見る．

15.1 Z ボゾンの強粒子化崩壊

標準模型によると Z ボゾンの強粒子化崩壊(ハドロニック)は，クォーク-反クォーク対への崩壊が起点となっている可能性が最も高い．生成する強粒子(ハドロン)群は，大抵 Z ボゾンの静止系において互いに反対向きに，安定もしくは長寿命の粒子群から成る 2 つの噴射(ジェット)を形成する (図 15.1 参照)．噴射(ジェット)に含まれる各過程の詳細が正確に理解されているわけではない．

噴射(ジェット)の運動量は，それに属する全粒子の総運動量と定義するのが妥当であり，最初に生成したクォークもしくは反クォークの運動量に等しいものと想定される．Z ボゾンは $t\bar{t}$ 対(つい)以外のどのクォーク-反クォーク対にも崩壊できる静止エネルギーを持っているが，今のところ観測される噴射(ジェット)の生成源を，たとえ

§ (訳註) Stanford Linear Accelerator Center.

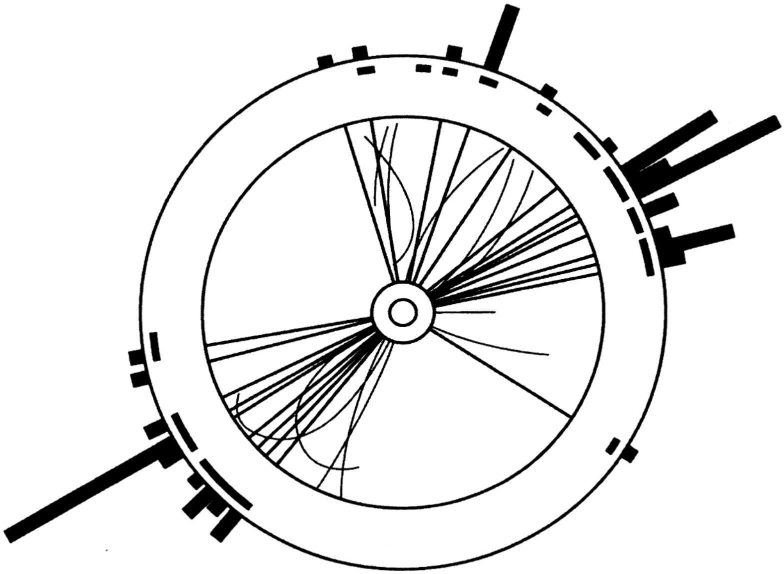


図 15.1　CERN の OPAL 検出器によって記録された Z ボゾンの強粒子化崩壊．荷電粒子の飛跡を内部に表示してある．外部の円に示した黒い帯は，外側のカロリメーターに照射された粒子エネルギーの角度分布を示している．飛跡はビームに垂直な面への投射図になっている (Dydak 1990 参照).

ばu，d，sクォーク，もしくはそれらの反クォークのどれかに特定することはできない．しかしbクォークから生じた噴射の多くはB中間子 ($b\bar{u}, b\bar{d}$) の観測から一定の信頼性を持って特定できる．B中間子はbクォーク噴射の中で生成する確率が高く，それ以外の噴射で生成する確率が低いからである．同様にして$\bar{\mathrm{B}}$中間子は$\bar{\mathrm{b}}$噴射の特定に利用される．またチャーム数を持つ強粒子をcクォークや$\bar{\mathrm{c}}$クォークから生成した噴射の特定のために用いることもできる．

観測される噴射から，最初に生じていたクォークを特定できれば，標準模型から予想されるZボゾンのクォーク-反クォーク対への崩壊頻度との比較が可能となる．まず，決まったスピン状態を持つZボゾンの崩壊を考察しよう．相互作用ラグランジアン密度 (14.14) はd，s，bクォークに関して同じ形を持ち，最低次の摂動で $\mathrm{d}_k\bar{\mathrm{d}}_k$ 対 ($\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}$，$\mathrm{d}_2 = \mathrm{s}$，$\mathrm{d}_3 = \mathrm{b}$) への微分崩壊頻度

は，次のように与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{d}_k\bar{\mathrm{d}}_k)}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{3G_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{Z}}^3}{32\sqrt{2}\pi}\left[\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}\right)^2(1-\cos\theta)^2 + \left(\frac{2}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}\right)^2(1+\cos\theta)^2\right] \tag{15.1}$$

θ はZボソンのスピン方向と d_k クォークの運動方向がなす角度である．同様にして $\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}$ 対もしくは $\mathrm{c}\bar{\mathrm{c}}$ 対への崩壊頻度も，次のように与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(\mathrm{u}_k\bar{\mathrm{u}}_k)}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{3G_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{Z}}^3}{32\sqrt{2}\pi}\left[\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}\right)^2(1-\cos\theta)^2 + \left(\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}\right)^2(1+\cos\theta)^2\right] \tag{15.2}$$

上記の崩壊頻度の式には色の因子3が含まれている．$m_{\mathrm{q}}/M_{\mathrm{Z}}$ の項は無視した．θ に関する積分を実行して全崩壊頻度を求めると，次のようになる．

$$\Gamma(\mathrm{d}_k\bar{\mathrm{d}}_k) = \frac{G_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{Z}}^3}{4\sqrt{2}\pi}\left[1-\frac{4}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}+\frac{8}{9}\sin^4\theta_{\mathrm{w}}\right] = 0.3677\ \mathrm{GeV} \tag{15.3}$$

$$\Gamma(\mathrm{u}_k\bar{\mathrm{u}}_k) = \frac{G_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{Z}}^3}{4\sqrt{2}\pi}\left[1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_{\mathrm{w}}+\frac{32}{9}\sin^4\theta_{\mathrm{w}}\right] = 0.2853\ \mathrm{GeV} \tag{15.4}$$

上記の値は $\sin^2\theta_{\mathrm{w}} = 0.2315$ と置いて得た (11.4節参照)．全5通りのクォーク-反クォーク対への崩壊モードを合わせた全崩壊頻度は，

$$\Gamma_{\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}} = 1.6737\ \mathrm{GeV}$$

である．この最低次の計算値は，実験で得られたZボソンの全強粒子化(ハドロニック)崩壊頻度，

$$\Gamma_{\mathrm{experimental}} = 1.741 \pm 0.006\ \mathrm{GeV}$$

に近い．

高エネルギーのZボソンに関しては，強い相互作用の効果を，ある程度まで信頼できる方法で推定できる (第17章)．付加的なグルーオン放射を考慮すると $\Gamma_{\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}}$ の理論値は因子 $f = 1.038$ の変更を受け，

$$\Gamma_{\mathrm{theoretical}} = f\Gamma_{\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}} = 1.737\ \mathrm{GeV}$$

となる．これは実験値に非常に近い値である．

$b\bar{b}$ 噴射(ジェット)と (信頼性は劣るが) $c\bar{c}$ 噴射(ジェット)を特定することで，これらの崩壊モードの部分幅を標準模型による予測と比べることができる．実験による推定値は，

$$\Gamma(b\bar{b}) = 0.385 \pm 0.006 \text{ GeV}$$
$$\Gamma(c\bar{c}) = 0.275 \pm 0.025 \text{ GeV}$$

である．標準模型の式 (15.3) および (15.4) を因子 f で補正した値は，

$$\Gamma(b\bar{b})(\text{theoretical}) = 0.3817 \text{ GeV}$$
$$\Gamma(c\bar{c})(\text{theoretical}) = 0.2961 \text{ GeV}$$

となり，理論と実験の結果は，充分によい一致を見せている．

15.2　クォーク生成の非対称性

13.6節で言及したように CERN の電子ビームは非偏極であったが，SLC の電子ビームは偏極させることができるので，偏極率の高い Z ボゾンが得られる．式 (15.1) によると，Z ボゾン崩壊による $b\bar{b}$ 対の生成において，b クォークの角度分布は Z ボゾンのスピン方向に対して，次のような前後非対称性を持つはずである．

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma(0<\theta<\pi/2) - \Gamma(\pi/2<\theta<\pi)}{\Gamma(0<\theta<\pi/2) + \Gamma(\pi/2<\theta<\pi)}$$
$$= -\frac{3}{4}\left(\frac{1-(4/3)\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{1-(4/3)\sin^2\theta_{\mathrm{W}} + (8/9)\sin^4\theta_{\mathrm{W}}}\right)$$

$\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.2315$ と置くと $\Delta\Gamma/\Gamma = -0.7016$ となる．Z ボゾン質量のピークにおいて，電磁的過程による対称な寄与は非常に弱く，電子ビーム方向に b クォーク噴射(ジェット)の前後非対称性の発現が予想される．SLC における b クォーク噴射(ジェット)の観測から $\Delta\Gamma/\Gamma = -0.630 \pm 0.075$ という値が得られた (Prescott 1996).

LEP において e^+e^- 衝突から生成した Z ボゾンは，電子ビーム方向に偏極 P を持ち，b クォーク噴射(ジェット)も次のように，電子ビーム方向に対する前後非対称を生じる．

$$A_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{b}} = P\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$$

13.6節により $\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.2315$ と置くと $P = -A_\mathrm{LR} = -0.148$ なので,

$$A^\mathrm{b}_\mathrm{FB}(\mathrm{theory}) = 0.104$$

と予想される．これに対して実験値 (Renton 1996) は,

$$A^\mathrm{b}_\mathrm{FB}(\mathrm{experimental}) = 0.0997 \pm 0.0031$$

である．また c クォーク噴射(ジェット)に関しても同様に,

$$A^\mathrm{c}_\mathrm{FB}(\mathrm{theory}) = 0.0719$$
$$A^\mathrm{c}_\mathrm{FB}(\mathrm{experimental}) = 0.0729 \pm 0.0058$$

となり，ここでも標準模型による予測は実験結果とよく一致している．

非対称性に関するこれらの実験の重要な側面を理解するには，仮に左手型でなく右手型のクォーク場を $SU(2)$ 2 重項に割り当てるならば，非対称性の符号が反対に発現するはずだということを認識しなければならない (全崩壊幅は影響を受けない)．非対称性の実験結果は，2 重項に左手型の場が割り当てられているという，標準模型の基本的な仮定を支持しているのである．

15.3 W$^{\pm}$ボゾンの強粒子化崩壊

e$^+$e$^-$ 衝突型加速器(コライダー)は清浄な Z ボゾン源となるが，W$^{\pm}$ ボゾンに関しては，これほど清浄な発生源が得られていない．したがって W$^{\pm}$ ボゾン崩壊の実験データは，Z ボゾン崩壊のデータほど正確ではない．W$^{\pm}$ ボゾンの強粒子化(ハドロニック)崩壊も Z ボゾンの崩壊と同様に，W$^{\pm}$ ボゾン静止系における反対向きの噴射(ジェット)の生成として観測され，それらは最初に生じたクォーク-反クォーク対から生じたものと解釈される．

たとえば W$^+$ のクォーク u_i ($\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}$, $\mathrm{u}_2 = \mathrm{c}$) と反クォーク $\bar{\mathrm{d}}_j$ ($\bar{\mathrm{d}}_1 = \bar{\mathrm{d}}$, $\bar{\mathrm{d}}_2 = \bar{\mathrm{s}}$, $\bar{\mathrm{d}}_3 = \bar{\mathrm{b}}$) への崩壊を考えよう．W$^+$ とクォーク場との結合は $\mathcal{L}_\mathrm{qW}$ (式 (14.15)) によって与えられ，小林-益川行列の要素 V_{ij} に依存する．摂動の最低次においてクォークの質量を無視すると，$\mathrm{u}_i\bar{\mathrm{d}}_j$ 対への微分崩壊頻度は,

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{ij}}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{3G_\mathrm{F}M_\mathrm{W}^3}{16\sqrt{2}\pi}|V_{ij}|^2(1-\cos\theta)^2 \qquad (15.5)$$

と与えられる．θ は W^+ のスピン方向と u_i の運動量方向の角度である．θ に関して積分をすると，全崩壊頻度は，

$$\Gamma(W^+ \to u_i\bar{d}_j) = \frac{G_F M_W^3}{2\sqrt{2}\pi}|V_{ij}|^2 = (0.677 \pm 0.006)|V_{ij}|^2 \text{ GeV} \quad (15.6)$$

となる．それぞれの強粒子噴射（ハドロン・ジェット）の元となったクォークを識別できるようなデータは存在しないので，Wボゾン崩壊からKM行列の個々の要素に関する情報は得られない．しかし j に関する和を取ると，KM行列のユニタリー性から，

$$\sum_{j=1}^{3}|V_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{3} V_{ij}V_{ij}^* = \sum_{j=1}^{3} V_{ij}V_{ji}^\dagger = 1 \qquad (i = 1,2,3)$$

のはずである．生成可能な u_i すなわちuクォークとcクォークに関して和を計算し，因子 f を含めると，

$$\Gamma(\text{all possible q}\bar{\text{q}} \text{ pairs}) = \frac{G_F M_W^3 f}{\sqrt{2}\pi} = 1.41 \pm 0.008 \text{ GeV}$$

となる．この値は観測された W^+ ボゾンの強粒子化（ハドロニック）崩壊の幅，

$$\Gamma(\text{hadronic}) = 1.41 \pm 0.07 \text{ GeV}$$

によく一致している．

結論としてZボゾンおよび $W^\pm$ ボゾンと，レプトンおよびクォークとの相互作用に関して，標準模型による記述の有効性を疑う理由はない．ここまで示した実験によってKM行列の各要素 V_{ij} が決まるわけではないが，少なくともユニタリー性から要求されるひとつの条件に関しては満足な結果が得られている．我々がKM行列をさらに徹底して究明するためには，もっと低エネルギーの強粒子（ハドロン）物理に頼る必要がある．

練習問題　(＊解法とヒント p.301)

*15.1 崩壊頻度の式 (15.3)，(15.4) および (15.6) を導出せよ．これらの式ではクォークの質量を無視している点に注意すること (問題13.3 参照)．

第16章 強い相互作用の理論：量子色力学

第1章で強粒子(ハドロン)の性質を説明するクォーク模型の基本的な特徴を述べた．クォークは色 (color) の指標を担っており，強い相互作用 (strong interaction) を媒介するグルーオン場と直接に相互作用をする．

我々は電磁相互作用と弱い相互作用がゲージ理論の形でよく記述されることを見てきた．標準模型では強い相互作用もゲージ理論によって記述されるが，本章ではこれを論じる．強い相互作用の理論は“量子色力学”(quantum chromodynamics：QCD) の呼称で知られており，実験的にも見られる通り，クォークの閉じ込めという注目すべき性質 (1.4節) を持つ．本章ではクォークの電磁相互作用や弱い相互作用を無視して，強い相互作用の議論に専念する．

16.1 局所的 $SU(3)$ ゲージ理論

QCDでは，それぞれの香りのクォークに対して3つの場を充てる．これらの場は“色3重項”(colour triplet) を形成する．たとえばuクォークは，次のような色3重項で記述される．

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{u_r} \\ \mathrm{u_g} \\ \mathrm{u_b} \end{pmatrix}$$

u_r，u_g，u_b は4成分 Diracスピノルであり，添字の r，g，b (red, green, blue と呼ぶ) は色状態の指標である．

そして理論が局所的 $SU(3)$ 変換，

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q} \tag{16.1a}$$

の下で不変であることを仮定する．$\mathbf{q}$ は任意のクォーク3重項，$\mathbf{U}$ は時空座標に依存する $SU(3)$ の任意の要素である．数学的な操作の手順は，レプトンの弱い相互作用を記述する $SU(2)$ 理論の場合と同じである．電弱理論における行列の場 $\mathbf{W}_\mu$ に相当する 3×3 行列のゲージ場 $\mathbf{G}_\mu$ を導入する．$SU(3)$ 変換の下で，このゲージ場は次のように変換しなければならない．

$$\mathbf{G}_\mu \to \mathbf{G}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{G}_\mu\mathbf{U}^\dagger + (\mathrm{i}/g)(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger \tag{16.1b}$$

共変微分を次のように定義する．

$$D_\mu\mathbf{q} = (\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{q} \tag{16.2}$$

そうすると，$SU(3)$ 変換の下で，

$$D'_\mu\mathbf{q}' = \mathbf{U}D_\mu\mathbf{q} \tag{16.3}$$

という関係が成立する．ここで $D'_\mu\mathbf{q}' = (\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu)\mathbf{q}'$ である．これらの式に現れるパラメーター g は“強い相互作用の結合定数”(strong coupling constant) である．

$\mathbf{G}_\mu$ は電弱理論の $\mathbf{W}_\mu$ と同様に Hermite(エルミート)行列であり，その固有和(トレース)はゼロである．したがってこの行列を，群の生成子にあたる8つの基本行列 λ_a (付録B，B.7節参照) を用いて展開できる．

$$\mathbf{G}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G_\mu^a \lambda_a \tag{16.4}$$

8つの独立な実数場として現れる係数 $G_\mu^a(x)$ は，グルーオンゲージ場である (慣例に従い因子 $\frac{1}{2}$ を別につける)．

ここでも Yang-Millsの流儀で強度テンソルを構築する (11.2節参照)．

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{G}_\nu - \partial_\nu\mathbf{G}_\mu + \mathrm{i}g(\mathbf{G}_\mu\mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu\mathbf{G}_\mu) \tag{16.5}$$

このテンソルは，式 (16.1b) の $SU(3)$ 変換の下で，次のように変換する．

$$\mathbf{G}'_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{U}^{\dagger} \tag{16.6}$$

グルーオンのラグランジアン密度は，次のように設定される．

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}\right] \tag{16.7}$$

式 (16.6) の関係と固有和の巡回不変性により，$\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ はゲージ不変性を持つ．

付録 B の式 (B.26) を用いて，$\mathbf{G}_{\mu\nu}$ も 8 つの“成分”へ展開できる．

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G^{a}_{\mu\nu}\lambda_a \tag{16.8}$$

式 (B.28) の性質，

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda_a\lambda_b\right) = 2\delta_{ab}$$

も用いると，グルーオンのラグランジアン密度を次のように書き直せる．

$$\mathcal{L}_{\text{gluon}} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^{a}_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \tag{16.9}$$

クォークのラグランジアン密度は，標準的な Dirac 粒子を表すラグランジアンの形とする．

$$\mathcal{L}_{\text{quark}} = \sum_{f=1}^{6}\left[\bar{\mathbf{q}}_f \mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}g\mathbf{G}_{\mu})\mathbf{q}_f - m_f\bar{\mathbf{q}}_f\mathbf{q}_f\right] \tag{16.10}$$

和はクォークの 6 種類すべての香りについて取る．m_f は 14.2 節で定義した“真の”クォークの質量である．$\mathcal{L}_{\text{quark}}$ は明らかに $SU(3)$ 変換 (式 (16.3) を用いる) の下で不変である．ここで，ここまでに導入した簡潔な表記法に改めて注意を向けてもらいたい．上式には，明示してある香りの和の他にも，色の添字に関する和と，4 成分 Dirac スピノルと γ 行列の添字に関する和の計算が含まれている．読者自身が理解を確実なものにするために，略記に頼らずに式全体を書き下してみるとよい．

強い相互作用の全ラグランジアン密度は，次のように表される．

$$\mathcal{L}_{\text{strong}} = \mathcal{L}_{\text{gluon}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} \tag{16.11}$$

8つのグルーオンゲージ場は質量項を持たない．グルーオン場とHiggs場は直接には結合していない．QCDにおいてHiggs場はクォークへの質量の付与だけに関与する．場の方程式はHamiltonの原理から要請される作用の停留性に基づいて与えられる．6つのクォーク3重項に関して，次式が容易に得られる(5.5節参照)

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\mathbf{q}_f = 0 \tag{16.12}$$

8つのグルーオン場に関しては，場 G^a_ν に着目したラグランジアン密度の変分により，次式が得られる(4.2節参照)．

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} = j^{a\nu} \tag{16.13}$$

$$j^{a\nu} = g\Big[f_{abc}G^b_\mu G^{c\mu\nu} + \sum_f \bar{\mathbf{q}}_f \gamma^\nu (\lambda_a/2)\mathbf{q}_f\Big] \tag{16.14}$$

f_{abc} は，次のように定義される $SU(3)$ 構造定数である(付録B，B.7節参照)．

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_a = 2\mathrm{i}\sum_{c=1}^{8} f_{abc}\lambda_c \tag{16.15}$$

交換関係がこのような構造を持つことは，式(16.5)で導入した強度テンソル $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ の定義に依っている．

$\mathbf{G}^{\mu\nu} = -\mathbf{G}^{\nu\mu}$ なので，次式が導かれる．

$$\partial_\nu j^{a\nu} = 0 \tag{16.16}$$

すなわち保存する8つのカレントが得られる．これらはNoether（ネーター）の定理の下で大域的な $SU(3)$ 対称性の帰結として現れるNoether（ネーター）カレントである．したがって8つの運動の定数(保存量)が存在し，それらは時間に依存しない次の演算子に関係づけられる．

$$Q^a = \int j^{a0}\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{16.17}$$

場の方程式，特にグルーオン場の方程式は，電弱理論の方程式と同じく非線形である．式(16.14)を見ると，クォーク場だけでなくグルーオン場自身もカレント $j^{a\nu}$ に寄与を持ち，グルーオン場の源となっている．クォーク同士はグルーオン場の媒介を通じて相互作用をするが，グルーオン場もそれ自

身と相互作用をする．

グルーオン場は質量を持たないので，色の力は長距離力になりそうに思われるが，強い相互作用は現実には短距離にしか及ばない．グルーオン場は 10^{-15} m $= 1$ fm 程度の範囲内に " 閉じ込め " (confining) を起こすという性質が知られている．この性質のために，自由なクォークや自由なグルーオンが単独で観測されることはない．

電弱理論では全ての結合定数をゼロと置いた " 自由場 " の近似が摂動計算の基礎として有用であることを，前章までに見てきた．しかしクォークやグルーオンに関しては，自由場近似が一般に QCD のよい出発点になるわけではない．例外的に自由場近似が有効となるのは，非常に短距離 (≤ 0.1 fm) もしくは高エネルギー (> 10 GeV) の領域だけである．QCD の方程式は，低エネルギー領域では解析的に極めて扱い難い．真空状態ですら複雑な場の構成で特徴づけられることになり，今のところ解析不可能である．閉じ込めに関して解析的に証明が与えられているわけではないし，摂動によって閉じ込めを計算できるわけでもないが，数値計算によると QCD が閉じ込めの性質を持つことに疑念の余地はない．

16.2　重粒子と中間子の色ゲージ変換

色の対称性は強い相互作用の理論において重要な役割を果たすので，何故クォーク間の強い相互作用によって形成されている重粒子(バリオン)や中間子(メソン)において，色の性質が顕在化していないのか，という疑問が自然に出てくる．この疑問に対する回答を試みてみる．

我々は 1.4 節において重粒子(バリオン)が 3 つのクォークから形成されていること，また中間子がクォーク-反クォーク対であることを主張した．ここで 3 クォーク状態に関して，クォーク 1 が色 i，クォーク 2 が色 j，クォーク 3 が色 k を持つ状態を $|i, j, k\rangle$ と表記し，色状態の添字に 1，2，3 をあてることにする．クォークの他の全ての側面 (位置，スピン，香り) は，ここでは考えない．1.7 節において Pauli の原理による要請から，重粒子(バリオン)状態は，色添字の入替えに関して反対称でなければならないことを見た．我々が構築することのできる

唯一の反対称な色状態の組合せは，

$$|\,状態\,\rangle = \left(1/\sqrt{6}\right)\varepsilon_{ijk}\,|i,j,k\rangle \tag{16.18}$$

である．ここで ε_{ijk} は，

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{213} = 1$$

であり，i，j，k のうちの何れか 2 つが同じであれば $\varepsilon_{ijk} = 0$ と定義される．$\left(1/\sqrt{6}\right)$ は規格化因子である．

この状態は色の $SU(3)$ 変換の下で，どのように変換するだろうか？ 重粒子(バリオン)は空間的に拡がっているので，ここでは大域的な変換 (空間・時間座標に依存しない変換) に限定して，クォーク場が $\mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q}$ のように変換するものと考える．場の量子論において，これらの場はクォークを消滅させ，反クォークを生成する．変換によって重粒子(バリオン)状態 (16.18) は，$|\,状態\,\rangle \to |\,状態\,\rangle' = \left(1/\sqrt{6}\right)|a,b,c\rangle\, U^*_{ai}U^*_{bj}U^*_{ck}\varepsilon_{ijk}$ と変換することになるが，$SU(3)$ 行列の行列式は 1 なので，$\varepsilon_{ijk}U^*_{ai}U^*_{bj}U^*_{ck} = \varepsilon_{abc}\det\mathbf{U}^* = \varepsilon_{abc}$ である．したがって $SU(3)$ 変換の下で $|\,状態\,\rangle' = |\,状態\,\rangle$ という重要な結果が得られる．すなわち重粒子(バリオン)状態の変換は，単に 1 を掛けるだけの変換になる．このような状態は "色 1 重項 (colour singlet) 状態" と呼ばれる．

一方，中間子に目を向けて，クォークの色が i，反クォークの色が j の状態を $|i,j\rangle$ と書くことにする．ここでもクォークの他の属性は考えない．中間子状態は，次の線形結合で表される．

$$|\,中間子\,\rangle = \left(1/\sqrt{3}\right)\left(|1,\bar{1}\rangle + |2,\bar{2}\rangle + |3,\bar{3}\rangle\right) \tag{16.19}$$

$SU(3)$ 変換の下で，

$$|\,中間子\,\rangle \to |\,中間子\,\rangle' = |a,\bar{b}\rangle\, U^*_{ai}U_{bi}$$

となる．しかし $U^*_{ai}U_{bi} = U_{bi}U^\dagger_{ia} = \delta_{ab}$ なので，

$$|\,中間子\,\rangle' = |\,中間子\,\rangle$$

である．すなわち中間子状態も重粒子(バリオン)状態と同様に色 1 重項である．

クォーク模型では，色の変換は観測される強粒子(ハドロン)に全く影響を及ぼさない．

式 (16.17) で定義される 8 つのグルーオンの色演算子 Q^a を，これらの状態に作用させるとゼロになる．このように $SU(3)$ 対称性は自然の性質によって隠されており，観測される粒子は色対称性変換の影響を受けない．これらの結果を格子QCD (lattice QCD) の計算にも関係づけることができる．格子QCD の計算によると，理論によって許容されるあらゆる状態は，色変換の影響を受けないという性質を持つ．

16.3 閉じ込めと漸近的自由性

QCD の数値シミュレーションでは，連続時空を，有限領域に広がった 4 次元時空格子点の集合に置き換える．グルーオン場は各格子点の位置だけで定義される．このような格子グルーオン場を扱うことのできる洗練されたコンピューター・プログラムが作られている．グルーオン場は交換するボソン場であるが，クォーク場は反交換するフェルミオン場であり，後者は計算技術的に取扱いが難しい．実際に行われている格子計算の大半はクォーク場を無視しており，軽い u クォークや d クォークさえ考慮しないので，仮想クォーク対の生成消滅の効果はすべて除かれている．このような，いわゆる“鎮静近似(クエンチ)”(quenched approximation) では，ラグランジアン密度を式 (16.9) の $\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ と置く．$\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ はおおよそ 1 fermi 程度の範囲で閉じ込め現象 (confinement) を起こす (17.1節，17.2節参照)．

これよりも短距離のおおよそ 0.2 fermi 未満の尺度では，$\mathcal{L}_{\text{gluon}}$ も全QCD ラグランジアン密度も，もう一方の“漸近的自由性”(asymptotic freedom) という重要な性質を示す．強い相互作用の“有効 (effective) な”結合定数は短距離において非常に小さくなるので，クォークもグルーオンも近似的に自由粒子のように考えることができ，それらの相互作用を摂動論で扱える．

強い相互作用の“波数に依存する§”有効結合定数を議論する前に，まず準備として電磁気学の遮蔽効果の考察をしよう．

原子レベルの $\sim 10^{-10}$ m の尺度において，電子と陽電子の電磁相互作用

---

§ (訳註) 原語は“running”で，これを直訳して“走る”結合定数といった術語を用いる文献もある．

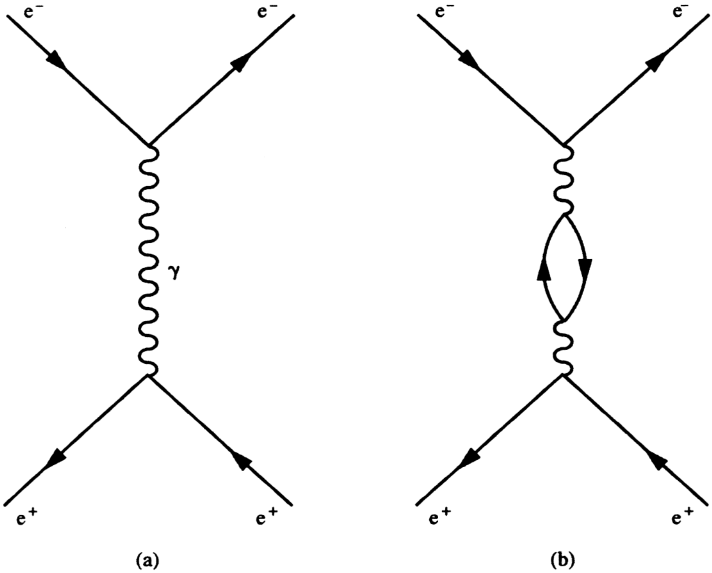


図16.1　(a) 電子と陽電子がひとつの光子を交換する最低次の過程を表す Feynman ダイヤグラム．これに対応する摂動計算の結果は式 (16.20) になる．(b) 真空の分極による最低次の修正を表すダイヤグラム．この効果を含めると，Q^2/m^2 が大きい領域で式 (16.21) の結果が得られる．

は Coulomb エネルギー $V(r) = -e^2/4\pi r$ によって与えられる．電子-陽電子 Coulomb 散乱の振幅は，最低次の摂動では $V(r)$ の Fourier 変換 $V(Q^2)$ に比例する．

$$V(Q^2) = \int V(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{16.20}$$

$\mathbf{Q}$ は重心系における運動量の遷移である．

QED では量子補正によって上記の結果が修正される．真空から生じた仮想的 (virtual) な $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 対が，電荷から発している電場によって分極するので，原子レベルの距離で観測される電荷は“裸の”電荷そのものではなく，仮想 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 対によって遮蔽を受けた結果として観測される電荷である．短距離になると遮蔽の効果は弱まり，観測される実効的な電荷は大きくなる．真空の分極効果 (図16.1) を含んだ QED の摂動計算によると，式 (16.20) は Q^2 が

大きいときに次のように修正される．

$$V(Q^2) = -\frac{e^2}{Q^2}\frac{1}{1-(e^2/12\pi^2)\ln(Q^2/4m^2)} \tag{16.21}$$

m は電子の質量である．この結果は $Q^2 \gg 4m^2$ の条件下で (ただし分母がゼロに近づくほど Q^2 が大きくなり過ぎない範囲で！) 成立する．したがって Q^2 が大きい場合の有効結合定数は，次のように与えられる．

$$\alpha(Q^2) = \frac{e^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{(e^2/4\pi)}{1-(e^2/12\pi^2)\ln(Q^2/4m^2)} \tag{16.22}$$

Q^2 が大きいほど (短距離になるほど) 有効結合定数は大きい．$e^2/12\pi^2 \approx 10^{-3}$ なので真空分極の効果は小さいが，原子物理において分極を含めた計算の結果は，観測結果と高い精度で一致している．

QED と同様に，QCD でも真空分極の効果が生じるが，その結合は遥かに強く，効果も更に劇的である．クォークと反クォークの散乱について，式 (16.22) を得たような方法で同じ次数の摂動計算をすると，Q^2 が大きいときに，強い相互作用の有効結合定数 $\alpha_s(Q^2)$ は (Close 1979, p.217 参照)，

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{g^2/4\pi}{1+(g^2/16\pi^2)\left[11-(2/3)n_f\right]\ln(Q^2/\lambda^2)} \tag{16.23}$$

と与えられる．QED の式における電子質量の代わりに上式に現れた λ はエネルギーの次元を持つが，これは繰り込みに関係するパラメーターである．n_f はクォークの香りの実効的な数で，Q^2 が非常に大きく $Q^2 >$ (t クォークの質量)^2 であれば $n_f = 6$ となるが，Q^2 が小さくなると n_f も少なくなる．上式において注目すべき点は $\left[11-(2/3)n_f\right]$ が正になることである．つまり QED の場合とは対照的に Q^2 が増えると $g(Q^2)$ は減る．これが漸近的自由性と呼ばれる性質の本質である．QED の場合と同様にフェルミオンは負の寄与を持つが，それよりも仮想グルーオンによる正の寄与 11 の効果が大きい．この性質の違いは QCD においてグルーオン・ループ (図16.2 参照) が存在することに起因する．このような QCD の性質を最初に指摘したのは Gross（グロス） and Wilczek（ウィルチェック） (1973) および Politzer（ポリィツァ） (1973) であった．

一見，繰り込みのために，元の g の他にエネルギーの次元を持つ第 2 のパラメーター λ を導入する必要があるように思われるが，有効結合定数は，事

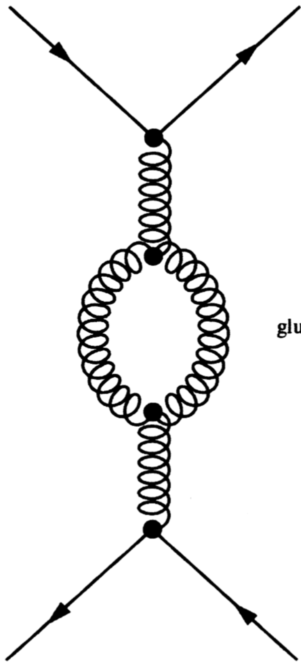


図16.2　図16.1と似たFeynmanダイヤグラムであるが，クォークと反クォークの間でグルーオンが交換される過程を表している．真空分極による付加的な最低次の寄与は，このグラフのようにグルーオンが自己結合する過程に関係づけられる．

実上ひとつのパラメーターに依存する．次のようにΛを定義する．

$$\frac{1}{g^2} - \frac{1}{16\pi^2}\left[11 - (2/3)n_{\rm f}\right]\ln\lambda^2 = -\frac{1}{16\pi^2}\left[11 - (2/3)n_{\rm f}\right]\ln\Lambda^2 \quad (16.24)$$

そうすると，結合定数は次のように表される．

$$\alpha_{\rm s}(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{\left[11 - (2/3)n_{\rm f}\right]\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (16.25)$$

この驚くべき性質は，摂動のすべての次数において見られる．$\alpha_{\rm s}(Q^2)$ の高次の展開は，たとえば Particle Data Group (1996) によって与えられている．

Λは Q^2 が大きい極限において明確に定義される．g と λ という 2 つのパ

ラメーターよりも，むしろこの Λ というパラメーターひとつだけを，実験によって決めるべき QCD の基本的な定数であると見なすのが慣例となっている．無次元パラメーター g が次元を持つ Λ に置き換わったことは興味深い．$Q^2 \to \infty$ のときに $\alpha_s(Q^2) \to 0$ となるので，この有効結合定数によって漸近的に自由な性質が表されている．式 (16.25) を見ると $Q^2 = \Lambda^2$ において有効結合定数は発散するので，この波数以下の領域で摂動論は破綻していると見なければならない．摂動で扱えない Q^2 が小さい領域は長距離の過程に関係しており，摂動論が成立する範囲の目安を与える長さの尺度 Λ^{-1} は “閉じ込め距離” (confinement length) と呼ばれている．

16.4　短距離のクォーク-反クォーク相互作用

QED では電子と陽電子が光子を交換する過程から，次の Coulomb ポテンシャルを生じる．

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int V(Q^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{Q} = -\frac{e^2}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{r}$$

ここで $V(Q^2) = -e^2/Q^2$ であり，α は微細構造定数である．QCD の摂動論では，光子の交換の代わりに 8 種類のグルーオンの交換が起こる．単純に最低次の摂動を考えると，色 1 重項状態の中のクォーク-反クォーク間に生じる Coulomb 的ポテンシャルは，相互の距離を r とすると，

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{QCD}}(r) &= -\sum_a \frac{g^2}{4\pi r}\frac{1}{3}\frac{\lambda_{aij}}{2}\frac{\lambda_{aji}}{2} \\ &= -\sum_a \frac{g^2}{4\pi r}\frac{1}{12}\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = -\frac{4}{3}\frac{g^2}{4\pi r} \end{aligned} \tag{16.26}$$

と表される (Leader and Predazzi 1982, p.175 参照)．因子 (1/3) は色 1 重項状態の規格化によって生じている (式 (16.19) 参照)．量子補正を考慮すると，短距離における有効ポテンシャルは次のようになる．

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{QCD}} &= -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)}{r} \\ \frac{\alpha_s(r)}{r} &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{Q} \end{aligned} \tag{16.27}$$

これはチャーモニウム $c\bar{c}$ やボトモニウム $b\bar{b}$ のような，重いクォークと反クォークが緩慢に動く系の挙動を理解するために重要な結果である．これらの系では“色のCoulombエネルギー”がポテンシャルへの主要な寄与となり，“色の磁気効果”は相対的に v/c のオーダーでしか寄与しない．主に Q^2 が大きいところの $\alpha_s(Q^2)$ の挙動から，小さい r における $V_{QCD}(r)$ が決まる (問題 16.5)．我々は第 17 章で，再びチャーモニウムとボトモニウムを取り上げる予定である．

16.5 クォーク数の保存

ラグランジアン密度 (16.11) は，色の局所的 $SU(3)$ 対称性に加えて，次のような 6 種類の大域的 $U(1)$ 対称性も備えている．

$$\mathbf{q}_f \to \mathbf{q}'_f = \exp(\mathrm{i}\alpha_f)\mathbf{q}_f \tag{16.28}$$

標準模型では，これらの対称性は大域的なものに留まり，局所的なゲージ対称性にはなっていない．このことは，それぞれの香りを持つクォーク数の保存を意味する．したがって強い相互作用はクォークの香りを変えない．しかし現実に，この対称性は厳密に成り立たず，弱い相互作用がクォークの香りを変えることを無視した近似として成立するに過ぎない．弱い相互作用，特に小林-益川混合行列の部分を含めて考えると，6 つの $U(1)$ 対称性が 1 つの $U(1)$ 対称性へと減じる．それぞれの香りを持つクォークの数は保存せず，全クォーク数だけが保存することになる．

16.6 アイソスピン対称性

uクォーク (2 MeV $< m_u <$ 8 MeV) と dクォーク (5 MeV $< m_d <$ 15 MeV) の質量は，sクォーク (100 MeV $< m_s <$ 300 MeV) や，重い c, b, t クォークの質量に比べて非常に小さい．uクォークと dクォークは，最も軽い強粒子（ハドロン）と比べても軽い (π^0 中間子の質量は $\sim$ 135 MeV，陽子の質量は $\sim$ 938 MeV である)．したがって低エネルギーではラグランジアン密度の第 1 近似として u，d 以外のクォークを無視して，

$$\mathcal{L}_{\rm ud} = \bar{\mathbf{u}}{\rm i}\gamma^\mu(\partial_\mu + {\rm i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{u} + \bar{\mathbf{d}}{\rm i}\gamma^\mu(\partial_\mu + {\rm i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{d} - m_{\rm u}\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u} - m_{\rm d}\bar{\mathbf{d}}\mathbf{d} \tag{16.29}$$

という形を考えることができる．$\mathbf{G}_\mu$ は式 (16.13) から評価されるグルーオン場行列において，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{d}$ 以外のクォーク場を省いたものである．式 (16.29) の中の $\mathbf{u}$ と $\mathbf{d}$ は色の添字と Dirac スピノル成分の添字を明示していないが，Dirac フェルミオン場の色 3 重項である．

ここで $\mathbf{u}$ と $\mathbf{d}$ の 2 つの場を組み合わせて“アイソスピン 2 重項”(isospin doublet) を作る．

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{d}(x) \end{pmatrix} \tag{16.30}$$

そうすると，ラグランジアン密度を次のように書ける．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm ud} = &\bar{\mathbf{D}}{\rm i}\gamma^\mu(\partial_\mu + {\rm i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{D} \\ &-(1/2)(m_{\rm u} + m_{\rm d})\bar{\mathbf{D}}\mathbf{D} - (1/2)(m_{\rm u} - m_{\rm d})\bar{\mathbf{D}}\tau_3\mathbf{D}\end{aligned} \tag{16.31}$$

ここで，

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．$\mathcal{L}_{\rm ud}$ は，次の大域的 $U(1)$ 変換の下で不変である．

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp(-{\rm i}\alpha^0)\mathbf{D} \tag{16.32}$$

この不変性から次のような，保存するクォークカレントが導かれる (7.1 節参照)．

$$J^\mu = \bar{\mathbf{D}}\gamma^\mu\mathbf{D} = \bar{\mathbf{u}}\gamma^\mu\mathbf{u} + \bar{\mathbf{d}}\gamma^\mu\mathbf{d} \tag{16.33}$$

また，別の大域的 $U(1)$ 変換，

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp(-{\rm i}\alpha^3\tau^3)\mathbf{D} \tag{16.34}$$

に関しても $\mathcal{L}_{\rm ud}$ は不変であり，ここから次の保存カレントが得られる．

$$J_3^\mu = \bar{\mathbf{D}}\gamma^\mu\tau^3\mathbf{D} = \bar{\mathbf{u}}\gamma^\mu\mathbf{u} - \bar{\mathbf{d}}\gamma^\mu\mathbf{d} \tag{16.35}$$

式 (16.33) と式 (16.35) は，ラグランジアン密度 (16.31) が u クォーク数と d

クォーク数をそれぞれ独立に保存することを示している．

いわゆる“アイソスピン対称性”は，質量の差 $(m_\mathrm{u} - m_\mathrm{d})$ を無視した場合に現れる．質量差を省いたラグランジアン密度は，次の大域的 $SU(2)$ 変換の下で不変である．

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp(-\mathrm{i}\alpha^k \tau^k)\mathbf{D} \tag{16.36}$$

τ^k は $SU(2)$ の生成子である (付録B，B.3節参照)．この近似の下では，式 (16.35) に与えた保存カレントの他に，

$$J_1^\mu = \bar{\mathbf{D}}\gamma^\mu\tau^1\mathbf{D}, \quad J_2^\mu = \bar{\mathbf{D}}\gamma^\mu\tau^2\mathbf{D} \tag{16.37}$$

のようなカレントも保存することになり，これらに対応して，時間に依存しない次の保存量が得られる．

$$\int \mathbf{D}^\dagger \tau^k \mathbf{D} \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{16.38}$$

$SU(2)$ 変換は，3 次元空間内の回転と等価なので，3 次元の“アイソスピン空間”を仮想してよい．固有角運動量 (スピン) 演算子 $\mathbf{S} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$ からの類推で，アイソスピン演算子を $\mathbf{I} = (1/2)\boldsymbol{\tau}$ と定義する．そうすると，

$$\mathbf{I}^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = (3/4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．u クォークは $\mathbf{I}^2$ と I_3 の固有状態で $I = 1/2$，$I_3 = 1/2$ であり，d クォークは $I = 1/2$，$I_3 = -1/2$ の固有状態である．アイソスピンを扱う数学は，角運動量を扱う数学と全く同じで，この形式は第 1 章で示したように強粒子(ハドロン)状態の分類と理解のために有用である．本節の議論から，このような強粒子(ハドロン)の分類学は QCD に根拠があり，それは u − d 質量差や電弱相互作用を無視した見方であることが分かる．

16.7　カイラル対称性

クォークの質量を完全に無視してしまうと，更にいろいろ近似的な対称性が現れてくるが，これらの対称性は素粒子物理において大いに関心が持たれている．ラグランジアン密度 (16.31) を，左手型アイソスピン 2 重項

$\mathbf{L} = (1/2)(1-\gamma^5)\mathbf{D}$ と右手型アイソスピン 2 重項 $\mathbf{R} = (1/2)(1+\gamma^5)\mathbf{D}$ を用いて書き直すことができる．質量項を無視すると，次のようになる．

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}^\dagger \mathrm{i}\tilde{\sigma}^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{L} + \mathbf{R}^\dagger \mathrm{i}\sigma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{R} \tag{16.39}$$

$\mathbf{L}$ と $\mathbf{R}$ は 2 成分スピノルの 2 重項であり，8 つの保存カレントが現れる．

$$\mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{L}, \quad \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\tau^k\mathbf{L}, \quad \mathbf{R}^\dagger\sigma^\mu\mathbf{R}, \quad \mathbf{R}^\dagger\sigma^\mu\tau^k\mathbf{R} \quad (k=1,2,3)$$

ここで重要な点は，カレント $\mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\tau^1\mathbf{L}$ とカレント $\mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\tau^2\mathbf{L}$ は，ラグランジアン密度 (14.15) の中で $W^\pm$ ボゾン場に結合し，実効的なラグランジアン密度 (14.22) に現れることである．式 (14.15) の中の関係するクォーク因子は $\mathbf{u}_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{d}_\mathrm{L}V_\mathrm{ud}$ であって，次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{d}_\mathrm{L} &= \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu(1/2)(\tau^1+\mathrm{i}\tau^2)\mathbf{L}\\ \mathbf{d}_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{u}_\mathrm{L} &= \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu(1/2)(\tau^1-\mathrm{i}\tau^2)\mathbf{L}\end{aligned} \tag{16.40}$$

このような見方は，実効的な β 崩壊のラグランジアンに関する洞察を与えるが，それについては第 18 章で述べる．

互いに独立な対称変換，

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\alpha^0 + \alpha^k\tau^k)\right]\mathbf{L}, \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

および，

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\beta^0 + \beta^k\tau^k)\right]\mathbf{R}, \quad \mathbf{L} \to \mathbf{L}$$

は，Dirac スピノルを用いると，それぞれ次のように書ける．

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\alpha^0 + \alpha^k\tau^k)(1/2)(1-\gamma^5)\right]\mathbf{D} \tag{16.41}$$

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\beta^0 + \beta^k\tau^k)(1/2)(1+\gamma^5)\right]\mathbf{D} \tag{16.42}$$

8 つの独立な対称操作を，次のように取り直すこともできる．まず，

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\alpha'^0 + \alpha'^k\tau^k)\right]\mathbf{D} \tag{16.43}$$

という 4 つの変換はクォーク数とアイソスピンの保存を与える．残りの，

$$\mathbf{D} \to \mathbf{D}' = \exp\left[-\mathrm{i}(\beta'^0 + \beta'^k\tau^k)\gamma^5\right]\mathbf{D} \tag{16.44}$$

という 4 つの操作に関する不変性は“カイラル対称性”(chiral symmetry) と呼ばれる．

練習問題　(＊解法とヒント p.302)

*16.1 次式を導出せよ．

$$G^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - g\sum_{b,c} f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

*16.2 問題16.1 の結果を用いて，グルーオンのラグランジアン密度 (16.9) における自己結合項が次のようになることを示せ．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = g(\partial_\mu G^a_\nu f_{abc} G^{b\mu} G^{c\nu}) - (g^2/4) f_{abc} f_{ade} G^b_\mu G^c_\nu G^{d\mu} G^{e\nu}$$

*16.3 カレント $j^{a\nu}$ の式 (16.14) を導出せよ．

*16.4 $V(Q^2)$ の式 (16.21) が発散する Q の値を求めてみよ．

*16.5 式 (16.27) から，次式を示せ．

$$\alpha_{\mathrm{s}}(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha_{\mathrm{s}}(x^2/r^2)\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

($\alpha_{\mathrm{s}}(x^2/r^2)$ の式 (16.25) は $x > \Lambda r$ の場合にのみ妥当であるが，小さい r に関しては，これが積分に対して主要な寄与を持つものと考えられる．)

第 **17** 章

量子色力学の計算

QCD の計算は 2 つの方法で行われる．低エネルギーに関しては格子シミュレーション，高エネルギーに関しては摂動計算が用いられる．本章では計算から得られている結果を簡単に紹介する．

17.1　格子QCDと閉じ込め

16.1節において，低エネルギーでは QCD に対する非摂動的アプローチが必要であることを指摘した．“ 格子QCD ” (lattice QCD) はそのような目的に適う手法である．グルーオン場は 4 次元格子点 $(n^0, \mathbf{n})a$ の上に定義される．a は格子間隔，n^μ は整数である．場の微分は離散的な差分に置き換わる．このような措置によって “ 格子正則化された ” (lattice regularised) QCD が与えられる．格子上では波長が $< 2a$ の波を記述できないので，格子間隔 a の逆数が紫外切断 (ultraviolet cut-off) の波数に対応する．格子系は空間内の回転に関する完全な対称性を持たないが，$a \to 0$ の極限は本来の連続な QCD に対応するものと信じられている．現在のコンピューターの処理能力で $\sim (36)^4$ 点ほどの計算が可能である．強い核力の範囲は ~ 1 fm であるが，このような距離を格子系のシミュレーションで扱うために，a が $(2\ \mathrm{fm})/36 = 0.056$ fm に比べて短かすぎない ($1/a = 3.6$ GeV より大きすぎない) ものと想定する．

16.3節で述べた高エネルギーの摂動論では，クォークの質量を無視し，繰

り込みパラメーター λ と無次元の結合定数 g を組み合わせて，エネルギーの次元を持つ単一のパラメーター Λ を作った．そして摂動の最低次における有効結合定数 $\alpha_s(Q^2)$ と Λ の関係を式 (16.25) に与えた．クォークを含まない格子QCD では，非物理的な格子間隔のパラメーター a と無次元の結合パラメーター $g(a)$ を組み合わせて，エネルギーの次元を持つ単一の物理パラメーター Λ_{latt} を作る．最低次の“格子摂動”では，$a \to 0$ とすると $g(a) \to 0$ になる (Hasenfratz and Hasenfratz 1985 参照).

$$g^2(a) = \frac{-16\pi^2}{11\ln(a^2\Lambda_{\mathrm{latt}}^2)} \tag{17.1}$$

ここでは $a \to 0$ の極限において Λ_{latt} は a とは独立に決まっているものと見なし，エネルギーの次元を持つ Λ_{latt} が現実の有効結合定数 (無次元) に対応しているものと見る．この驚くべきパラメーターの対応のさせ方を“次元の転化”(dimensional transmutation) と呼ぶ．

式 (17.1) は，式 (16.25) において n_f をゼロと置いたものと比較すべき式である．理論的に，

$$\frac{\Lambda_{\mathrm{latt}}}{\Lambda} = [\text{定数}] \approx \frac{1}{30} \tag{17.2}$$

となることが示されている (Dashen and Gross 1981)．この定数の正確な値は，Λ を定義する繰り込みの機構に依存し，クォークの香りの数が含まれる．Λ_{latt} (あるいは等価的に Λ) の値は実験から決まる．17.3節で $\Lambda \sim 300$ MeV, $\Lambda_{\mathrm{latt}} \sim 10$ MeV であることを見る予定であるが，ここから式 (17.1) により $a \sim 0.056$ fm において結合定数 g は 1 のオーダーであると推測される．

格子QCD でクォークと反クォークの相対位置を順次変えていくと，色1重項状態におけるポテンシャルのクォーク-反クォーク距離に対する依存性が計算できる．このポテンシャルの短距離領域の形は16.4節で扱った．仮想クォーク対生成の効果を除いた鎮静(クエンチ)近似の下で，非摂動の格子計算が行われている．

格子計算において距離の単位は a，エネルギーの単位は $(1/a)$ である．ここではまず結合定数 g の値が設定され，互いに $r = |\mathbf{n}|a$ だけ離れた格子点上にクォークと反クォークが固定される ($\mathbf{n}$ は3つの整数の組合せである)．クォーク-反クォーク対から生じる場のエネルギー $E(r)$ の計算を，距離を変

えて繰り返し行った結果として，次の距離依存性が見出された．

$$E(r) = 2A + Kr - \frac{4}{3}\frac{\alpha_{\mathrm{latt}}(r)}{r} \tag{17.3}$$

A と K は定数である．因子 (4/3) は 16.4節の摂動計算の結果との比較を容易にするために加えた．定数 $2A$ はクォークと反クォークの静止エネルギーへの寄与と解釈されるので，これらの仮想質量へと吸収させて考えると，有効ポテンシャルは次のように書かれる．

$$V(r) = Kr - \frac{4}{3}\frac{\alpha_{\mathrm{latt}}(r)}{r} \tag{17.4}$$

$(32)^4$ 点格子系を用いた Bali and Schilling (1993) の計算結果を図17.1に示す．この計算では $g = 0.97$ としてある．長距離では第1項の Kr が支配的になる．定数 K は“弦張力”(string tension) と呼ばれる．格子QCDの鎮静(クエンチ)近似において g を固定してしまうと，パラメーターはエネルギーの次元を持つ a^{-1} (もしくは Λ_{latt}) だけである．K は a^{-2} の次元を持っており，Bali and Schilling (1993) の得た結果は $K = 0.01475(29)a^{-2}$ であった．17.2節において，弦張力を $K \approx (440\ \mathrm{MeV})^2 \approx 1\ \mathrm{GeV\ fm}^{-1}$ と置けば，クォーク閉じ込めの現象論的な記述が可能であることを見る予定だが，$K = (440\ \mathrm{MeV})^2$ とすると格子間隔は $a = 0.0544$ fm，$a^{-1} = 3.62$ GeV と逆算される．

ここから式 (17.1) を用いて Λ_{latt} を推定することができる．しかしこの式は (あるいは格子摂動論に基づいて更に高次の項まで展開した式でも) $a \to 0$ の極限だけで妥当である．Λ_{latt} の推定を信頼できるものにするには，異なる g の値の下で計算を繰り返さなければならない．それぞれの g の値に対応する a が，弦張力から逆算される．そうすると $a \to 0$ の極限における Λ_{latt} が推定できる．Bali and Schilling (1993) は $(32)^4$ 点格子系から $\sqrt{K}/\Lambda_{\mathrm{latt}} = 51.9^{+1.6}_{-1.8}$ という結果を得たが，この値は Booth *et al.* (1992) が $(36)^4$ 点格子系の計算から推定した値 $\sqrt{K}/\Lambda_{\mathrm{latt}} = 49.6(\pm 3.8)$ とよく合っている．$\sqrt{K} = 440$ MeV と置くと $\Lambda_{\mathrm{latt}} \approx 8.5$ MeV であり，式 (17.2) により $\Lambda \approx 255$ MeV である．

r が小さいところでは，Coulomb的な項が支配的になる．$\alpha_{\mathrm{latt}}(r)$ は摂動論から予想されるように，r の減少に伴って緩やかに減少する関数となることが見出された (16.3節)．図17.1のポテンシャルのフィッティングから，

$$\alpha_{\mathrm{latt}}(r) = 0.236 - (0.0031\ \mathrm{fm})/r$$

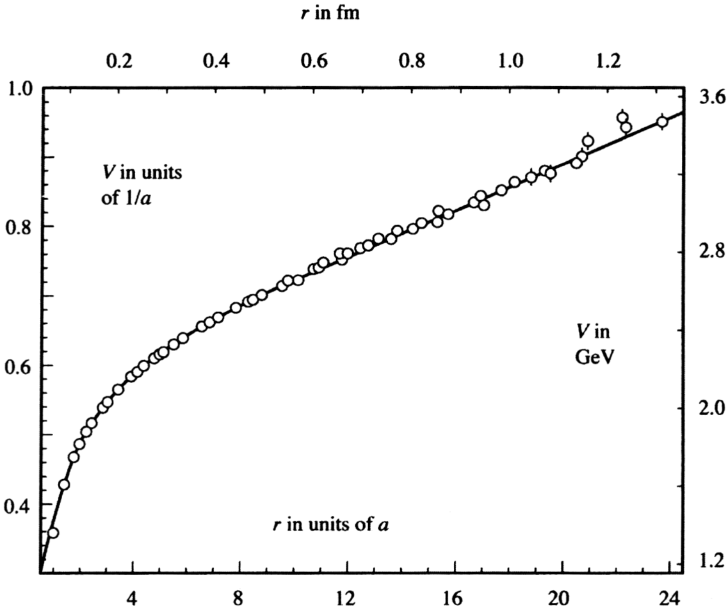


図 17.1　格子計算されたクォーク-反クォーク色 1 重項のポテンシャル．結合定数 g (1 のオーダー) を固定して，格子計算から $V(r)$ の各点を求めた (r の単位は a，V の単位は $1/a$)．計算結果の全点を対象に，次の式でフィッティングを行った．

$$V(r) = 2A + Kr - (c/r) + (f/r^2)$$

上図は $g = 0.97$ と置いた計算例である．フィッティングの結果によると $K = 0.0148$ で，K は $1/a^2$ を単位とする弦張力である．$c\bar{c}$ と $b\bar{b}$ に関する現象論によれば $K \approx (440\ \mathrm{MeV})^2$ と推定される．この値に基づいて a を逆算すると $a = 0.055$ fm，$1/a = 3.58$ GeV となる．以上の計算から a の関数としての $g(a)$ のデータ点がひとつ与えられる．格子計算から推定される連続極限の数値の信頼性を調べるには，いくつもの g の値の下で a の算出を繰り返し，式 (17.1) のような漸近式 (Λ_{latt} は a に対して独立) にどの程度合うかを見る必要がある．

と与えられる．これは QED における $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ に相当する量である．

鎮静近似(クエンチ)の計算において興味深い点は，ポテンシャルに線形で増加する項が現れることである．もし量子的に揺らぐクォーク場までを考慮するならば，固定されたクォークと反クォークを離して設定することによってポテンシャルエネルギーが大きくなると，新たにクォークと反クォークの対(つい)が生成され

るであろう．生成したクォークは，固定された反クォークに近づいて色 1 重項を形成し，生成した反クォークも固定されたクォークと色 1 重項を形成して，結果的には分離した 2 つの中間子になるであろう．

17.2 チャーモニウムとボトモニウム

第 1 章の図1.5 (p.15) において重いクォーク系であるチャーモニウム ($c\bar{c}$) とボトモニウム ($b\bar{b}$) のスペクトルの実験データを示してある．このデータを説明するために，式 (17.3) の形の相互作用ポテンシャルを含む Schrödinger 方程式を用いた計算が試みられてきた．重いクォーク系の基底エネルギー状態では，クォークと反クォークは動きが遅く，Coulomb的なポテンシャルが支配する領域に閉じ込められているので，非相対論的な近似が理に適っている．

Eichten *et al.* (1980) は，彼らの“単純な模型(ナイーヴ・モデル)”において $V(r)$ を式 (17.3) の形に置いた．彼らは実験で得られた $c\bar{c}$ 状態と $b\bar{b}$ 状態が，次のパラメーター値の設定の下で，よく説明できることを見出した．

$$K = (427 \text{ MeV})^2/\hbar c = 0.924 \text{ GeV fm}^{-1}$$

$$\alpha(r) = \text{constant} = 0.39$$

$$m_{\rm c} = 1.84 \text{ GeV}, \quad m_{\rm b} = 5.17 \text{ GeV}$$

$c\bar{c}$ 系でも $b\bar{b}$ 系でも実験的に最も調べやすい励起状態は，クォーク-反クォーク対(つい)のスピンが結合して対のスピン値が 1 となった P 状態 (スピン 3 重項) である．図17.2 に，$b\bar{b}$ 系で最低エネルギーの S 状態と，P 状態 3 重項の質量に関して，模型による予測と実験データの比較を示す．P 状態では軌道角運動量とスピンが結合して $J = 0, 1, 2$ となる．実験結果を見ると，スピン-軌道結合によって生じる準位の分裂は小さい．

ここで得られた“弦張力”の値は，他の研究から得られた推定値にも近い．あらゆる現象論的な推定が $K \approx 1$ GeV fm^{-1} 程度の値を与えている．

軽いクォーク系，特に π 中間子や陽子，中性子などは，今のところ格子QEDで容易に扱えるものにはなっていない．軽いクォークの運動学には，背景として量子的に揺らいでいる軽いクォーク-反クォーク対が深遠な影響を及ぼす

ものと考えられるので，鎮静近似(クエンチ)を適用するのは不適切である．

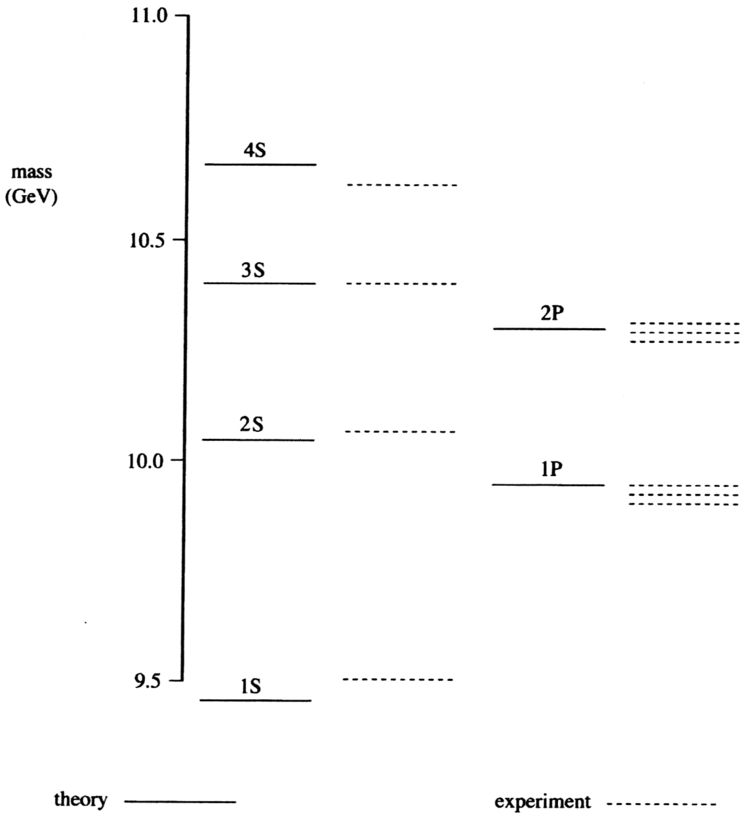


図 17.2　実験で得られた $b\bar{b}$ 系の S 状態と P 状態の質量を，非相対論的な計算結果と比較した図．計算には式 (17.4) のポテンシャルを用い，$K = 0.948$ GeV fm^{-1}，$\alpha(r) = \text{constant} = 0.39$，$m = 5.17$ GeV，$A = -0.38$ GeV と置いた (Eichten *et al.* 1980 参照)．観測された P 状態は $J = 0, 1, 2$ が分裂しているが，これは計算では考慮していないスピン-軌道結合の効果であろう．計算された状態の半径 (自乗平均平方根) は，1S 状態では 0.2 fm，4S 状態では 0.92 fm と違っている．非相対論的な計算が信頼できるかどうかという観点から v/c の平均を調べてみると，最大で 0.10 である．

17.3　摂動的QCDと深非弾性散乱

摂動的QCDの第1の応用は，陽子の部分子(パートン)分布関数の Q^2 依存性の計算である．電子-陽子非弾性散乱を扱う部分子(パートン)模型 (付録D) において，陽子は部分子(パートン)分布関数 $p_i(x, Q^2)$ によって記述される．ここで，

$$Q^2 = -q_\mu q^\mu = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - (E - E')^2$$

である．$q^\mu = (E - E',\ \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ は，深非弾性散乱 (deep inelastic scattering) 前後の電子のエネルギーと運動量の変化 (部分子への移行量)，x は無次元の変数で $x = Q^2/[2M(E - E')]$ である (M は陽子質量)．部分子(パートン)はクォーク，反クォーク，もしくはグルーオンと同定されるべきものである§．ある固定された Q^2 の典型値を Q_0^2 とすると，その値を共有するデータから分布関数 $p_i(x, Q_0^2)$ が抽出される．そして別個のデータの組の数だけ分布関数が決まることになる．この段階で分布関数の抽出は，任意曲線による単なるフィッティングにすぎない．関数 $p_i(x, Q_0^2)$ はQCD (およびQED) の帰結として求まるべきだが，関数形を理論的に完全に決めるのは極めて難しい．しかし，ある Q_0^2 で x に関する分布関数が与えられ，そのときの Q_0^2 が充分大きいことを仮定すると，Q^2 の変化に対して分布関数がどのように "発展" (evolve) するかを摂動的QCDに基づいて予言できる．分布関数の発展の仕方は Alterelli and Parisi (1977) の式によって記述されるが，この式ではクォーク-グルーオン相互作用を摂動的に考慮してある．

ひとつの例として図17.3にBCDMS共同研究組織(コラボレーション)による構造関数 $F_2(x, Q^2)$ の実験データを示す (Benvenuti *et al.* 1989．構造関数の定義は付録D参照)．固定した x の各値の下で，Q^2 の関数としてのQCD発展の予言も併せ

---

§ (訳注) x は散乱過程の弾性／非弾性の度合いを表す変数で，0から1までの範囲の値を取る．完全非弾性散乱なら $x = 0$，弾性散乱なら $x = 1$ である．散乱に関与した部分子の有効質量は xM と表されるので，x が小さい領域は "軽い" 部分子成分の寄与を，x が大きい領域は "重い" 部分子成分の寄与を反映する．付録D.2節参照．

分布関数 p の添字 i は部分子 (ここでは荷電成分を対象とするのでクォーク) の種類を表す．仮想的 (virtual) な成分も存在確率を持つので，陽子を対象とする場合にも $i = \mathrm{u}, \bar{\mathrm{u}}, \mathrm{d}, \bar{\mathrm{d}}, \mathrm{s}, \bar{\mathrm{s}}, \ldots$ のように "組成クォーク" (u, d) 以外のクォーク・反クォーク成分も考慮する．付録D.2節，D.3節参照．

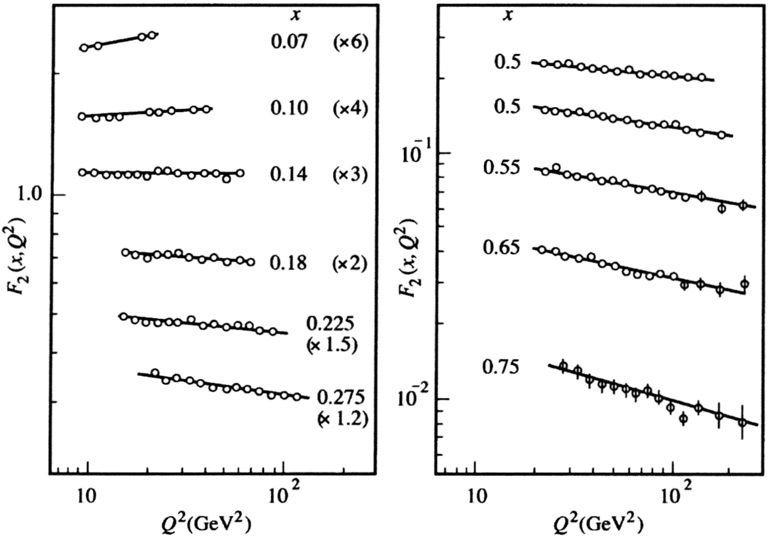


図 17.3　陽子の構造関数 $F_2(x, Q^2)$．実験データと，$\Lambda = 205$ MeV と置いた発展方程式に基づくフィッティング曲線を示してある．左側の図では見やすさのために，図中に示した因子を乗じた数値がプロットされている．たとえば $x = 0.18$ のグラフは $2F_2(0.18, Q^2)$ を表す．(*Physics Letters* **B223**, Benvenuti, A. C. *et al.* "Test of QCD and a measurement of Λ from scaling violations in the proton structure factor $F_2(x, Q^2)$ at high Q^2" 490(1989) より Elsevier Science-NL, Sara Burgerhartstraat 25, 1005 kv Amsterdam, The Netherlands の許可を得て転載．)

て示してある．すべての曲線が単一の Λ の値の下で与えられ，全データの挙動とよく合致している‡．このフィッティングによって $\Lambda = 205 \pm 80$ MeV と決まるが，ここから式 (16.25) を $n_f = 5$ として用いると $\alpha_s(M_Z^2) = 0.115 \pm 0.007$ と推定される．

‡ (訳註) 核子の構造関数 (点標的を想定した Mott 散乱の断面積と実際の断面積の違いの因子を与える関数) が深非弾性散乱領域において x のみの関数になる (エネルギーが異なっても，起こった散乱の "弾性度" x が同じであれば構造因子の寄与は同じである) というのが "Bjorken スケーリング" だが，この性質は核子の内部にある部分子が，強い相互作用に拘束されない自由な点粒子のように振舞うという仮定の下で導かれる (付録 D.2 節参照)．ここでは摂動的 QCD によって，強い相互作用の影響による Bjorken スケーリングの "破れ" (同じ x の下での Q^2 依存) が説明されている．

17.4 摂動的QCDと e^+e^- 衝突の物理

e^+e^- ビーム衝突による強粒子(ハドロン)生成の基本となる Feynmanダイヤグラムを図17.4に示す．10 GeV から 40 GeV の範囲では電磁的過程が支配的になる．このデータは 1.7節で議論した．

Zボゾンを生成する重心系エネルギーに近い 90 GeV のあたりでは，弱い相互作用が支配的になる．Zボゾンの強粒子化(ハドロニック)崩壊については，第15章で摂動論を用いて論じた．しかし断面積に関しては，たとえば図17.5に示すようにグルーオンの放射によって生じる付加的な寄与もある．

グルーオン放射の効果による修正は，簡単に表式化できる (Particle Data Group 1996 参照)．グルーオン補正を除いた強粒子(ハドロン)生成断面積を σ_0 と書くと，補正を考慮した断面積 σ は (次数を α_s^3 まで採ると),

$$\sigma = f\sigma_0$$
$$f = 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 1.411\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - 12.8\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 \tag{17.5}$$

と与えられる．$\alpha_s(Q^2)$ は Q^2 が重心系エネルギーの自乗に等しいところを採る．たとえば 17.3節の $\alpha_s(M_Z^2) = 0.115 \pm 0.007$ という数値を充てると $f = 1.038 \pm 0.003$ となるが，これが第15章で用いた値である．またZボゾンの強粒子化(ハドロニック)崩壊のデータに対するフィッティングから得られる値は $f = 1.041 \pm 0.003$ で，これによると $\alpha_s(M_Z^2) = 0.123 \pm 0.007$, $\Lambda = 310 \pm 90$ MeV である．電子-陽子散乱とZボゾン崩壊という全く別の実験から得られた数値が，このように互いに整合することは印象的である．

高エネルギーの e^+e^- 消滅によって生成される強粒子(ハドロン)は，大抵は反対向き

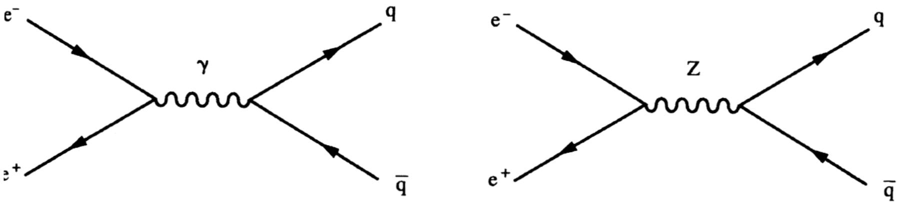


図17.4　e^+e^- 衝突によってクォーク-反クォーク対が生成される過程．ここではグルーオン放射の補正を含まない過程だけを示してある．

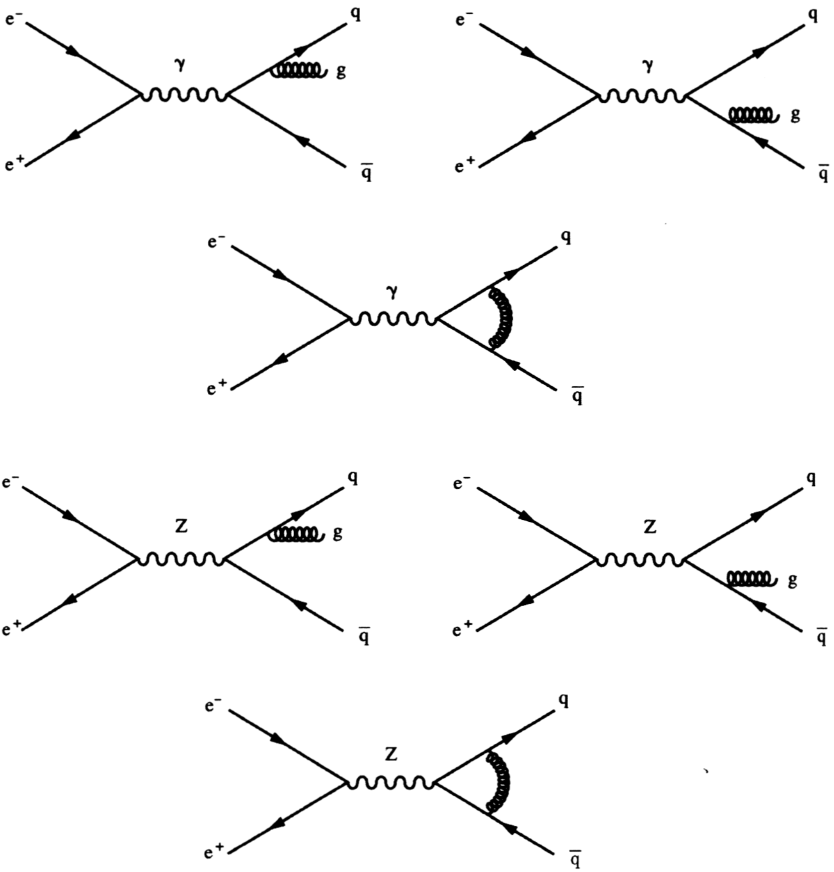


図 17.5　e^+e^- 衝突によるクォーク-反クォーク生成における最低次のグルーオン放射補正.

の 2 つの噴射（ジェット）を形成するが，それらは最初に生じた $q\bar{q}$ 対のクォークと反クォークに対応している．グルーオン放射による f 因子への寄与の大部分は，それぞれのクォーク噴射（ジェット）と反クォーク噴射（ジェット）の内部に閉じ込められた過程によっている．しかし摂動的QCD によると，グルーオンが相空間の別の領域へと放射されて第 3 の噴射（ジェット）を形成することもあり得る．図 17.6 は，そのような 3-

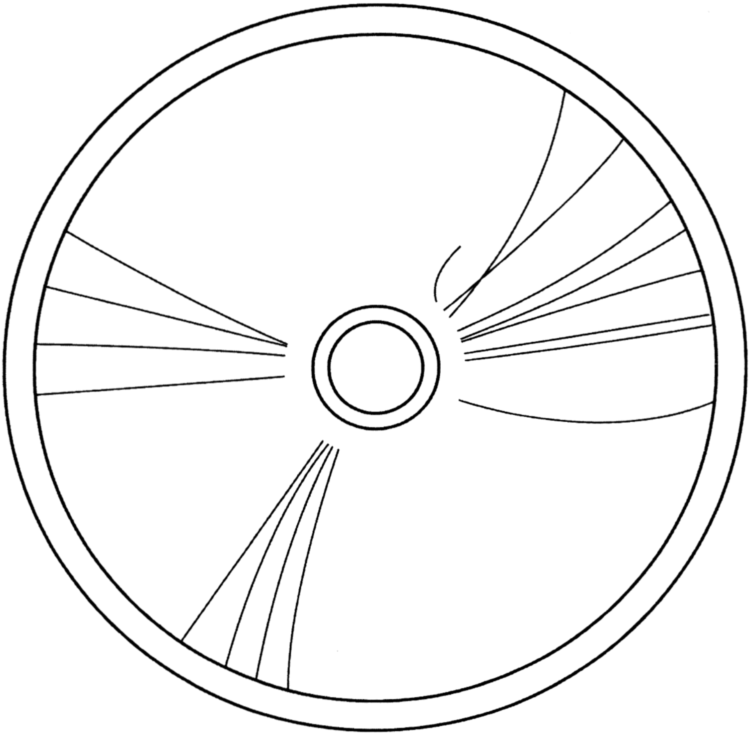


図17.6　DESY研究所の e^+e^- 衝突型加速器PETRAにおいて，JADE検出器によって記録された3-噴射（ジェット）現象.

噴射（ジェット）現象の例である．3-噴射（ジェット）現象や，さらには4-噴射（ジェット）現象も観測される場合があるが，それらの現象もQCDの理論を強く支持している．

第 **18** 章

小林-益川行列

第 14 章でクォークの弱い相互作用を論じた際に，小林-益川行列，

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

を導入し，次のようなパラメーター表示を与えた．

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{18.2}$$

ここで $c_{12} = \cos\theta_{12} > 0$，$s_{12} = \sin\theta_{12} > 0$ 等である．KM 行列は，異なる香りのクォーク場を結合する役割を持つ．この行列は物理的に重要な 4 つのパラメーターを含んでいるが，それらを上式のように第 1 象限内の 3 つの回転角 θ_{12}，θ_{13}，θ_{23} および位相角 δ と置くことができる．

各クォークの質量を関係づける理論がないのと同様に，KM 行列が含むこれらのパラメーター同士を関係づける理論もない．標準模型の中でクォークを扱う部分は，読者の目にも審美的な魅力に欠けるように映るかもしれない．KM 行列の各パラメーターは実験によって決定しなければならないが，本章では，これに関する実験的な情報を得る方法について述べる．

18.1　弱い相互作用によるクォークの半レプトン化崩壊

もしクォークを孤立した粒子として扱えるならば，KM行列に含まれる3つの回転角は，次のような“半レプトン化（セミレプトニック）”崩壊 (‘semileptonic’ decay) によって決定できるはずである．

$$\mathrm{b} \to \mathrm{c} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

最低次のBorn近似によると (図18.1)，この崩壊の頻度は次のように与えられる．

$$\frac{1}{\tau_{\mathrm{sl}}(\mathrm{b} \to \mathrm{c})} = \frac{G_\mathrm{F}^2 m_\mathrm{b}^5}{192\pi^3} |V_{\mathrm{cb}}|^2 f\left(\frac{m_\mathrm{c}}{m_\mathrm{b}}\right) \tag{18.3}$$

ここで $f(x) = 1 - 8x^2 + 8x^6 - x^8 - 24x^4 \ln x$ であるが，これは3体崩壊の許容される相空間に関係した因子である (Donoghue *et al.* 1992, p.382)．上式により $\tau_{\mathrm{sl}}(\mathrm{b} \to \mathrm{c})$ を測定できれば $|V_{\mathrm{cb}}| = V_{\mathrm{cb}}$ が決まる．同様に，エネルギー的に可能な $\mathrm{b} \to \mathrm{u}$，$\mathrm{c} \to \mathrm{s}$，$\mathrm{c} \to \mathrm{d}$，$\mathrm{s} \to \mathrm{u}$，$\mathrm{d} \to \mathrm{u}$ の半レプトン化（セミレプトニック）崩壊の観測によって $|V_{\mathrm{ub}}|$，$|V_{\mathrm{cs}}|$，$|V_{\mathrm{cd}}|$，V_{us}，V_{ud} が決まる．式 (18.2) において $|V_{\mathrm{ub}}|$，V_{cb}，V_{ud} から3つの回転角パラメーターが求まり，そこから $|V_{\mathrm{cd}}|$ または $|V_{\mathrm{cs}}|$ によって原理的に $\cos\delta$ が決まる (両者の比較は整合性のチェックになる)．注目すべき点はtクォークを調べる必要がないことだが，それでもこれらの実験的研究は緒についたばかりである．

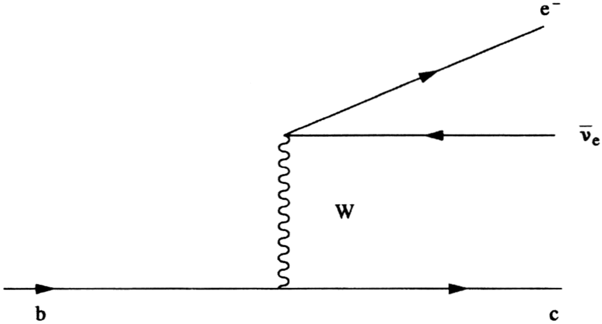


図18.1　半レプトン化崩壊 $\mathrm{b} \to \mathrm{c} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ を表すFeynmanダイヤグラム．

崩壊するクォークも生成するクォークも，常に“余計な”クォークと一緒になっており，それらも強い相互作用を通じて崩壊行列要素に影響を与えるので，直接的に上記のような作業を実施できるわけではない．

18.2　V_{cb} と $|V_{\mathrm{ub}}|$

b クォークを含む強粒子(ハドロン)の崩壊に関する重要な観測事実は，崩壊後の系がほとんど 100 %の確率で c クォークを含むということである．同様に $\bar{\mathrm{b}}$ クォークを含む強粒子(ハドロン)はほとんど常に $\bar{\mathrm{c}}$ クォークを含む強粒子(ハドロン)へと崩壊する．b クォークは u クォークか c クォークにしか崩壊できないので，直ちに $V_{\mathrm{cb}} \gg |V_{\mathrm{ub}}|$ と推測して，B^- 中間子 ($\mathrm{b\bar{u}}$) の崩壊の考察を始めることにする．この崩壊を表すダイヤグラムを図 18.2 に示す．

$$\mathrm{B}^- \to [\mathrm{c}\text{を含む強粒子系}] + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$$

このダイヤグラムでは W 結節点(ヴァーテックス)において V_{cb} の寄与があり，この弱い相互作用による崩壊は摂動パラメーターを V_{cb} とする摂動論によって扱える．問題を生じるのは，もう一方の余計なクォークである．観測される崩壊頻度から V_{cb} の値を導くには，2 つのアプローチの方法が考えられる．第 1 の方法では特定の強粒子(ハドロン)系，たとえば D^0 ($\mathrm{c\bar{u}}$) への部分幅を推定する．そのような推定

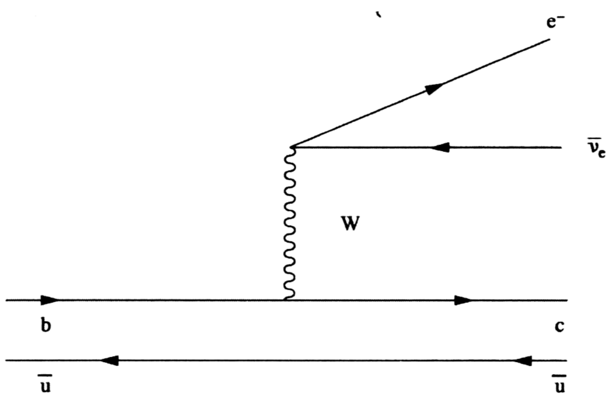


図 18.2　$\mathrm{B}^- \to \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_{\mathrm{e}} + [\mathrm{c}$を含む強粒子系$]$ の崩壊を表すクォーク模型ダイヤグラム．

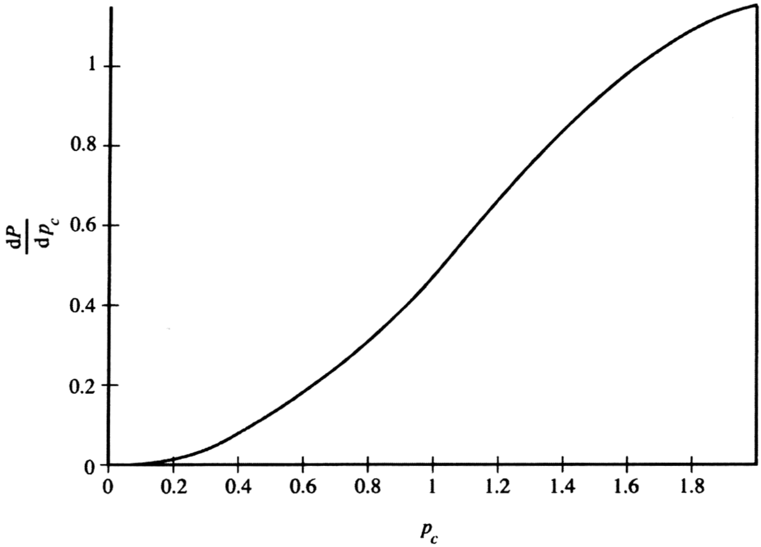


図18.3　静止したbクォークの半レプトン化崩壊から生じたcクォークの運動量分布を，自由クォークの近似の下で1次摂動により計算した結果．$m_{\rm b}$ は 4.3 GeV，$m_{\rm c}$ は 1.3 GeV と置いた．$(dP/dp_{\rm c})\Delta p_{\rm c}$ は，cクォークが微小区間 $\Delta p_{\rm c}$ の範囲内の運動量の値を持つ確率である．cクォークの平均運動量は 1.4 GeV である．

のためには崩壊前の B^- と崩壊後の D^0 の状態を表す具体的なクォーク波動関数のモデルが必要で，推定値はそのモデルに依存する．第2の方法としてはcクォークを含む強粒子(ハドロン)系への全崩壊頻度を考えることになるが，ここではこの方法を検討してみる．最も単純な議論の出発点として，強い相互作用をすべて無視した自由クォーク模型を採用してみよう．bクォークとcクォークは質量差が大きいので $(m_{\rm b} - m_{\rm c} \sim 3\ \mathrm{GeV})$ このモデルは妥当と言ってよい．静止したbクォークの崩壊によって生成するcクォークの運動量分布を，この近似で計算した結果を図18.3に示す．cクォークの平均運動量は大きい $(\sim 1.4\ \mathrm{GeV})$．部分子(パートン)模型(1.8節および付録D)の場合と同様に，運動量が大きければcクォークが別の余計なクォークと相互作用する前に崩壊が完了するものと考えられ，最終的な強粒子(ハドロン)状態は“包含崩壊”の全頻度にほとんど影響しない．1次近似として $V_{\rm ub}$ による小さな寄与を無視するならば，この B^- 中間子の半レプトン化(セミレプトニック)崩壊に関する寿命を，bクォークの半レプトン化(セミレプトニック)崩壊

の寿命 (18.3) と置いてよい．実験誤差の範囲内で，B^- と，そのアイソスピンの組をなす B^0 ($b\bar{d}$) の崩壊頻度は等しく，次の測定値が得られている．

$$(1/\tau_{sl}) \approx (1.55 \times 10^{-11}\ \mathrm{s})^{-1}$$

bクォークと cクォークの質量に Eichten *et al.* (1980) による値を採用して (17.2節参照)，式 (18.3) を用いると $V_{cb} = 0.035$ となる．一方 Particle Data Group (1996) によるクォーク質量の推奨値を用いると $V_{cb} = 0.051$ である．この違いは主として bクォークの質量の推定の違いによるものである．式 (18.3) を見ると，崩壊頻度は m_b の 5 乗に依存している．半レプトン化(セミレプトニック)崩壊の全崩壊頻度に関する QCD 補正の計算も，クォーク波動関数モデルを用いた計算も多く行われている．現在のところ，一定の合意が得られている値は，

$$V_{cb} = 0.041 \pm 0.003 \tag{18.4}$$

である．bクォークの崩壊の中で，cクォーク生成過程が支配的であるにもかかわらず，V_{cb} が小さいことは興味深い．

uクォークへの崩壊，

$$b \to u + e^- + \bar{\nu}_e$$

では，cクォークへの崩壊より多くの運動エネルギーが利用できるので ($m_b - m_u \sim 4$ GeV)，スペクトルはさらに高エネルギー領域まで拡がる．cクォークへの崩壊におけるエネルギー範囲を超える範囲の電子スペクトルから $|V_{ub}|$ が求まる (図18.4 参照)．理論的なモデルによってデータのフィッティングを行うと，

$$|V_{ub}|/V_{cb} = 0.08 \pm 0.02 \tag{18.5}$$

という結果が得られる．ここでは強い相互作用による補正も重要である．

KM行列はユニタリーなので $V^*_{ji}V_{jk} = \delta_{ik}$ であり，

$$|V_{ub}|^2 + |V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1 \tag{18.6}$$

となる．tクォークの質量は大きいので，V_{tb} は直接的な実験で確認し難いが，式 (18.4) と式 (18.5) の推定から，このユニタリー性の和則において V_{tb} が支

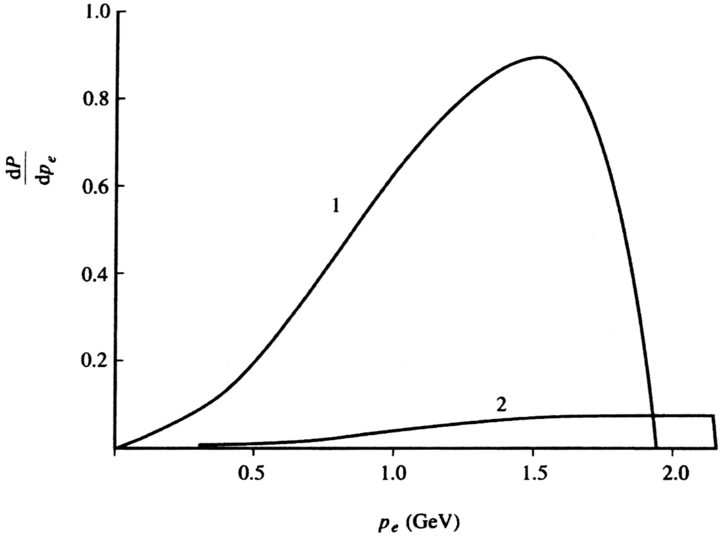


図18.4　"自由クォーク崩壊"モデルに基づく電子の運動量分布．崩壊モード (1) $\mathrm{b} \to \mathrm{c}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e}$, (2) $\mathrm{b} \to \mathrm{u}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e}$ について，(2) が (1) の 10 %程度のように両者の曲線を描いたが，実際には (2) は (1) の 1 %以下である．B中間子の半レプトン化崩壊では，p_e が大きいことは，一緒に生成したクォークの運動量が小さいことに対応するので，大きな p_e における電子の運動量分布は強粒子の質量と終状態の相互作用に対して敏感である．電子の運動量分布の実験データとその解析については Bartelt *et al.* (1993) および Skwarnicki (1996) を参照されたい．

配的になるのは明らかであって，

$$|V_\mathrm{tb}| \approx 1 \tag{18.7}$$

である．

18.3　V_ud と原子核の β 崩壊

KM行列の要素 V_ud は軽い u クォークと d クォークを結合し，β 崩壊に関与する．低エネルギーにおける原子核の β 崩壊に関する計算の出発点として，自由なクォークの近似は適切ではない．しかしながら 16.6節で論じた軽いクォークの近似的なアイソスピン対称性を利用することができる．

低エネルギー領域の β 崩壊を記述する実効的なラグランジアン密度は，次

のように与えられることを 14.5節において見た．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = -2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}\left[g_{\mu\nu}\nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}d^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\nu}u_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{ud}}\right] + [\text{Hermite共役}] \tag{18.8}$$

上式を 4 成分の Diracスピノルと式 (5.32) で定義した射影演算子 $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ を利用して書き直すこともできる．カレント j^{μ}_{e} と j^{μ}_{q} を次のように定義する．

$$j^{\mu}_{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} = \bar{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1/2)(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}} \tag{18.9}$$

$$j^{\mu}_{\mathrm{q}} = d^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}u_{\mathrm{L}} = \bar{d}\gamma^{\mu}(1/2)(1-\gamma^5)u \tag{18.10}$$

そうすると，ラグランジアン密度は次のように表される．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = -2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}V_{\mathrm{ud}}\left[j^{\dagger}_{\mathrm{e}\mu}j^{\mu}_{\mathrm{q}} + j^{\mu\dagger}_{\mathrm{q}}j_{\mathrm{e}\mu}\right] \tag{18.11}$$

ここで第 16 章で行ったように，uクォークと dクォークを一緒にしてアイソスピン 2 重項を形成する．

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$$

アイソスピン演算子 $(1/2)(\tau^1 - \mathrm{i}\tau^2)$ は次の性質を持つ．

$$\frac{1}{2}(\tau^1 - \mathrm{i}\tau^2)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

したがって，アイソスピンカレントを次のようにも書ける．

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\mathrm{q}} &= (1/4)\bar{\mathbf{D}}(x)\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)(\tau^1 - \mathrm{i}\tau^2)\mathbf{D}(x) \\ &= (1/2)\left[v^{\mu}(x) - a^{\mu}(x)\right] \end{aligned} \tag{18.12}$$

最後の式ではカレントを，空間反転の下でベクトルとして変換する部分 $v^{\mu}(x)$ と，軸性ベクトルとして変換する部分 $a^{\mu}(x)$ に分けた (5.5節参照)．

$$v^{\mu}(x) = (1/2)\bar{\mathbf{D}}\gamma^{\mu}(\tau^1 - \mathrm{i}\tau^2)\mathbf{D} \tag{18.13}$$

$$a^{\mu}(x) = (1/2)\bar{\mathbf{D}}\gamma^{\mu}\gamma^5(\tau^1 - \mathrm{i}\tau^2)\mathbf{D} \tag{18.14}$$

16.6節で見たように，正確なアイソスピン対称性の下では，次の保存カレントが得られる．

$$v^{\mu}_{i} = (1/2)\bar{\mathbf{D}}\gamma^{\mu}\tau^{i}\mathbf{D} \tag{18.15}$$

uクォークとdクォークのβ崩壊カレントの中のベクトル成分は，保存するアイソスピンカレントとなる．

核子を扱う場合は，陽子と中性子の実効的なDirac場$p(x)$と$n(x)$のアイソスピン2重項を次のように表す．

$$\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix} \tag{18.16}$$

低エネルギーの原子核物理学において，核子のβ崩壊を記述する実効的なラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = -2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}C\left[j^{\dagger}_{\mathrm{e}\mu}j^{\mu}_{\mathrm{N}} + j^{\mu\dagger}_{\mathrm{N}}j_{\mathrm{e}\mu}\right] \tag{18.17}$$

$$j^{\mu}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{4}\bar{\mathbf{D}}_{\mathrm{N}}\gamma^{\mu}(1 - g_{\mathrm{A}}\gamma^{5})(\tau^{1} - \mathrm{i}\tau^{2})\mathbf{D}_{\mathrm{N}} \tag{18.18}$$

と表される．核の実験データの範囲内で，

$$C = 0.9744 \pm 0.0010$$

$$g_{\mathrm{A}} = 1.26$$

という値が得られている (Donoghue *et al.* 1992, p.337, p.318)．

カレントj^{μ}_{N}のベクトル部分は，核物理において保存するアイソスピンカレントであり，より基礎的なクォークの水準のアイソスピンカレントに対応する．正確なアイソスピン対称性の下では，核子のアイソスピンカレントの実効的ラグランジアン (18.17) への寄与が，クォークのそれのラグランジアン (18.11) への寄与と同じであることが要請されるので，$V_{\mathrm{ud}} = C$と同定される．

V_{cb}，$|V_{\mathrm{ub}}|$，V_{ud}から3つの角度パラメーターθ_{12}，θ_{23}，θ_{13}が推定される．強い相互作用の不明瞭化の効果のために正確な推定は不可能であるが，奇妙さ(ストレンジネス)数やチャーム数を持つ粒子の崩壊から更に独立な情報が与えられる．Particle Data Group (1996) はユニタリー条件も考慮して，次の値を提示している[§]．

$$s_{12} = 0.219 \text{ to } 0.223,\ s_{23} = 0.036 \text{ to } 0.046,\ s_{13} = 0.002 \text{ to } 0.005$$

§ (訳注) p.237 参照.

式 (18.18) の "軸性結合定数" (axial coupling constant) g_A は，原理的には標準模型の内部で決定できるはずだが，第1原理に基づく信頼するに足る計算はまだ為されていない．16.7節のカイラル対称性の議論が g_A の含意についてある程度の示唆を与えているが，この問題は本書が扱うことのできる範囲を超えている．

18.4　中性K中間子の崩壊における CP 対称性の破れ

14.4節において，KM行列の全要素を実数にできない限り，標準模型のクォークを扱う部分は荷電共役変換とパリティ変換の組合せの下で不変ではないという重要な結果を得た．式 (18.2) に示したパラメーター表示において，KM行列要素がすべて実数になるためには，位相角が $\delta = 0$ でなければならない．

CP 対称性の破れは，1964年に中性K中間子 (neutral kaon) の崩壊において初めて見いだされた．K^0_L ('K long') と K^0_S ('K short') は2状態量子系の2つの中間子状態であり，クォーク模型の解釈では基本的な中間子状態 K^0 $(d\bar{s})$ とその反粒子状態 $\bar{K}^0$ $(\bar{d}s)$ の線形結合と見なされる．K^0 中間子は強粒子(ハドロン)の相互作用によって容易に生成される．たとえば，

$$\pi^-(\bar{u}d) + p(uud) \to K^0(d\bar{s}) + \Lambda(uds)$$

という反応がある．各粒子のクォーク構成を括弧内に示した．

基本状態 K^0 と $\bar{K}^0$ に対する CP 演算子の作用を，次のように想定しておく．

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \tag{18.19}$$

CP の固有状態は，$|K^0\rangle$ と $|\bar{K}^0\rangle$ の可干渉的(コヒーレント)な結合として構築できる．これらを次のように書くことにする．

$$|K^0_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\big), \quad |K^0_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\big) \tag{18.20}$$

そうすると，

$$CP|K^0_1\rangle = |K^0_1\rangle, \quad CP|K^0_2\rangle = -|K^0_2\rangle \tag{18.21}$$

となる．逆に $|K^0\rangle$ と $|\bar{K}^0\rangle$ を $|K^0_1\rangle$ と $|K^0_2\rangle$ の重ね合わせで表現することもで

きる．

時刻 $t=0$ に中間子状態が $|\mathrm{K}_1^0\rangle$ であったと仮定しよう．量子力学の規則により，時刻 t における状態は，

$$|\Psi_1(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\mathrm{K}_1^0\rangle$$

となる．H は系のハミルトニアンである．H が厳密な CP 対称性を持つと仮定すると，CP と H は交換可能で，

$$CP|\Psi_1(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}CP|\mathrm{K}_1^0\rangle = \Psi_1(t)$$

となる．同様に $CP|\Psi_2(t)\rangle = -\Psi_2(t)$ である．

弱い相互作用は，あらゆる K 中間子の初期状態を不安定にして，崩壊を起こさせる．しかし仮に初期状態が CP 対称性を持っていれば，時間発展した状態も CP 対称性を保持し続け，K_1^0 と K_2^0 の平均寿命 τ_1 と τ_2 がよく定義できるであろう．実験的には寿命が大きく異なる 2 つの中間子状態 K_S^0 と K_L^0 が観測されており，それらの寿命は $\tau_\mathrm{S} = 8.9\times10^{-11}$ s および $\tau_\mathrm{L} = 5.17\times10^{-8}$ s である．K_S^0 は主として 2 つの π 中間子 $\pi^+\pi^-$ もしくは $\pi^0\pi^0$ へと崩壊する．これらの 2-π 中間子（パイオン）状態は，いずれも CP 操作の固有状態で，固有値は $+1$ である (問題18.2)．K_L^0 は中間子崩壊モードにおいて，主として $\pi^0\pi^0\pi^0$ へと崩壊するが，この 3-π 中間子（パイオン）状態は CP に関して固有値 -1 の固有状態である (問題18.3)．しかし 1000 回のうち約 3 回の確率で K_L^0 は 2 つの π 中間子に崩壊し，それは CP 固有値 $+1$ の固有状態にあたる．

上記のような中間子崩壊の観測事実に基づいて，K_L^0 は CP の固有状態ではないか，またはこれらの崩壊において CP 対称性が破られているか，もしくはその両方であると結論される．

K_L^0 の半レプトン化（セミレプトニック）崩壊における CP 対称性の破れから，K_L^0 が CP の固有状態であるとは考え難い．基本状態の線形結合で表すと，

$$|\mathrm{K}_\mathrm{L}^0\rangle = \big(p|\mathrm{K}^0\rangle + q|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\big) \tag{18.22}$$

の係数の関係は $|p/q| \neq 1$ であって，$CP|\mathrm{K}_\mathrm{L}^0\rangle \neq -|\mathrm{K}_\mathrm{L}^0\rangle$ になっているものと思われる．K_L^0 の崩壊の約 40 % を占めているのは，次の 2 つのモードによる崩壊である．

$$\mathrm{K_L^0} \to \pi^- + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$$

$$\mathrm{K_L^0} \to \pi^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

もし $\mathrm{K_L^0}$ が CP の固有状態であり，かつ CP が保存されるのであれば，上記の 2 つのモードの崩壊頻度は互いに等しくなければならない．しかし実験によると，

$$\frac{\pi^-\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}\text{への崩壊頻度}}{\pi^+\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}\text{への崩壊頻度}} = 1 + \Delta$$

のように対称性が破れており，$\Delta = (6.66 \pm 0.28) \times 10^{-3}$ である．

標準模型では極めてよい近似として，$\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}$ 対(つい)は $\bar{\mathrm{s}}$ クォークの崩壊から生成され ($\bar{\mathrm{s}} \to \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$)，$\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}$ 対は s クォークの崩壊から生成されるものと見なしてよい．したがって $\mathrm{K_L^0}$ の $\mathrm{K^0}$ ($\mathrm{d\bar{s}}$) 成分が $\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}$ 対生成に関与し，$\bar{\mathrm{K}}^0$ ($\mathrm{\bar{d}s}$) 成分が $\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}$ 対に関与する．式 (18.22) から $\mathrm{K_L^0}$ の $\pi^-\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}$ モードの崩壊頻度は $|p|^2$ に比例し，$\pi^+\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}$ モードの崩壊頻度は $|q|^2$ に比例する．そうすると標準模型において $\mathrm{K_L^0}$ を表す線形結合の係数は，極めてよい近似で，

$$\frac{|p|^2}{|q|^2} = 1 + \Delta$$

を満たす．CP 破れのパラメーター Δ は，次の Jarlskog 因子 (14.3節参照) に比例する．

$$J = c_{12}c_{13}^2c_{23}s_{12}s_{13}s_{23}\sin\delta$$

しかしながら，信頼できる係数の計算方法は無い．18.3節で示した KM 回転角の正弦の推定値を採用すると，

$$J = (3.3 \pm 2.0) \times 10^{-5} \sin\delta$$

となる‡．このように標準模型において CP を破る過程は，仮に $|\sin\delta|$ が許容最大値 1 であったとしても，強く抑制されている．中性K中間子において CP 破れが観測できるのは，$\mathrm{K_S^0}$ 中間子と $\mathrm{K_L^0}$ 中間子の質量がおおよそ等しいからである．現実に CP 破れが観測されていることから位相角 δ がゼロでな

‡ (訳註) p.237 参照

いことは確実だが，K_L^0 崩壊のクォーク模型による計算は，δ の推定が可能なほど信頼できるものにはなっていない．

18.5　B中間子の崩壊における CP 対称性の破れ

標準模型によって予言される B^0 $(d\bar{b})$ と B^+ $(u\bar{b})$ およびこれらの反粒子の崩壊における CP 破れの効果を，実験的に究明する計画が立てられた．Stanford では“B 工場（ファクトリー）”の建設が進められている§．

K^0 および $\bar{K}^0$ と同様に，B^0 と $\bar{B}^0$ という中間子状態が近似的に CP 固有状態となるが，後者は前者よりも遥かに大きな質量を持ち，崩壊によって多くの異なった終状態を生じる．それらの崩壊のいくつかのモードにおいて CP 破れの観測が可能であると予想される．$B\bar{B}$ 系はこのような研究対象として特に適している．その理由は KM 行列 $\mathbf{V}$ における次のユニタリー条件，

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

の非対角要素に関する 6 つの関係式のひとつを見ることで理解できる．

b クォークに関しては，たとえば，

$$V_{\rm ud}V_{\rm ub}^* + V_{\rm cd}V_{\rm cb}^* + V_{\rm td}V_{\rm tb}^* = 0$$

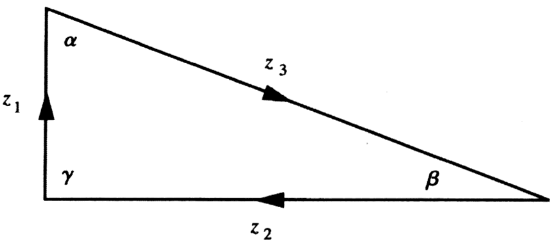


図 18.5　z_1，z_2，z_3 は複素数で，$z_1 = V_{\rm ub}^*V_{\rm ud}$，$z_2 = V_{\rm cb}^*V_{\rm cd}$，$z_3 = V_{\rm tb}^*V_{\rm td}$ である．$z_1 + z_2 + z_3 = 0$ なので，これらの数は複素平面において，いわゆる“ユニタリー三角形”を構成する．ここでは式 (18.2) の流儀に従い，仮に δ を 90° と置いて三角形を描いてみた．現在のところ $50^\circ < \delta < 120^\circ$ と考えられている (訳註：p.237 参照)．

§ (訳註) 1999 年に稼動を開始した．p.24 訳註および表 1.5 参照．

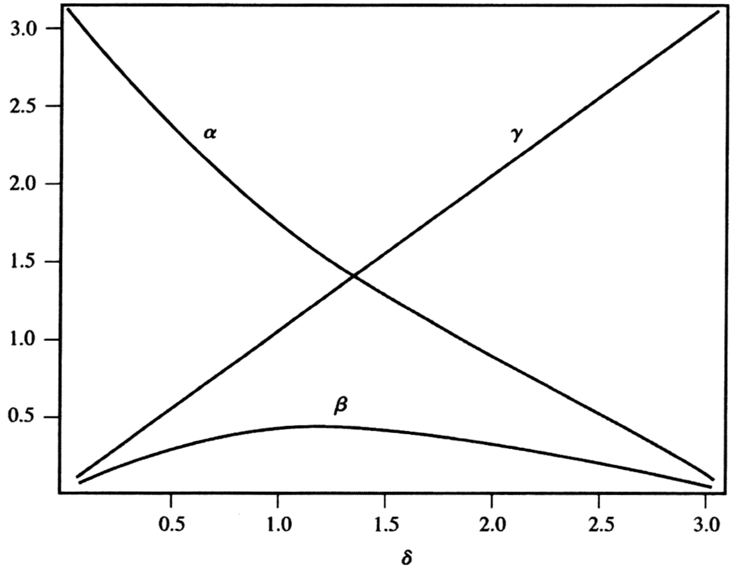


図18.6 ユニタリー三角形の内角 α, β, γ の δ 依存性. s_{12}, s_{23}, s_{13} は, p.230 に示した数値範囲の中央値を採用した.

という式が与えられる. $z_1 = V_{\mathrm{ud}}V^*_{\mathrm{ub}}$, $z_2 = V_{\mathrm{cd}}V^*_{\mathrm{cb}}$, $z_3 = V_{\mathrm{td}}V^*_{\mathrm{tb}}$ と置くと $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ である. z_1, z_2, z_3 は複素 z 平面において"ユニタリー三角形(トライアングル)"を構成する (図18.5). この三角形の面積が $J/2$ であることは容易に確認できる. 6 つの関係式に対応する 6 つの三角形は, すべて同じ面積になる. このユニタリー三角形に関しては, z_1, z_2, z_3 の各々が b クォーク行列要素を含み, 標準的な表示 (18.2) を見ると, それぞれが大きな位相を持ってもよい. この三角形の興味深い特徴は, 各辺が短いことである. 他の 5 つの三角形は, ほとんどつぶれた形になるが, このユニタリー三角形だけは, 内角 α, β, γ が 0 や 2π に近くならないものと予想される‡. これらの角は CP 破れのパラメーター δ の関数であり, 位相の扱い方の流儀とは無関係に決まる. パラメーター s_{ij} として p.230 に示した数値範囲の平均を採った場合のこれらの関数の形を図18.6 に示す.

$\mathrm{B\bar{B}}$ 系の確率の低い各種崩壊モードを観測する実験が計画されており, それ

‡ (訳註) α, β, γ の代わりに ϕ_2, ϕ_1, ϕ_3 という記号を用いる文献もある.

らの実験から独立に α，β，γ が推定される見込みである．標準模型では CP 破れが強く抑制されているので，対象となる崩壊モードは極めて稀にしか起こらない．もし各測定の結果が整合すれば，δ の値を決定できる．標準模型は今日まで各種の実験データの説明に成功してきた．しかし CP 破れは，これまでの実験検証が不足している側面である．$\mathrm{B\bar{B}}$ 崩壊実験によって，これから標準模型と整合しない実験結果が出てくる可能性もあり，仮にそのような事になれば，$\mathrm{B\bar{B}}$ の物理は"標準模型を超える理論"への窓を開くことになるだろう．

18.6　CPT 定理

記号 T は時間反転 $t \to t' = -t$ を表す．"CPT 定理"によると，Lorentz 不変な場の量子論は一般に，荷電共役変換と空間反転と時間反転を組み合わせた操作に関して不変である．この定理は 1955 年に Pauli によって発見された．

標準模型では CP 対称性が破れているので，CPT 定理によれば，この模型は時間反転対称性も破っているということになる．この"時間の矢"のことが気にかかる読者は，その意味を熟考してみるのもよいであろう．

18.7　訳者補遺：KM行列の数値

原書の出版後に B 中間子崩壊による本格的な KM 理論の検証実験が始まったこともあり，KM 行列は数値的にかなり明確になってきている．Particle Data Group がインターネット (http://pdg.lbl.gov/) で公開している数値 (2004) を紹介しておく．

各要素の絶対値：

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{u} \\ \mathrm{c} \\ \mathrm{t}
\end{array}
\begin{pmatrix}
0.9739 \sim 0.9751 & 0.221 \sim 0.227 & 0.0029 \sim 0.0045 \\
0.221 \sim 0.227 & 0.9730 \sim 0.9744 & 0.039 \sim 0.044 \\
0.0048 \sim 0.014 & 0.037 \sim 0.043 & 0.9990 \sim 0.9992
\end{pmatrix}
$$

$$
\qquad\quad \mathrm{d} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{s} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{b}
$$

$$s_{12} = 0.2243 \pm 0.0016$$

$$s_{23} = 0.0413 \pm 0.0015$$

$$s_{13} = 0.0037 \pm 0.0005$$

$$\delta = 60^\circ \pm 14^\circ = (1.05 \pm 0.24) \text{ radians}$$

$$J = (2.88 \pm 0.33) \times 10^{-5}$$

練習問題　(＊解法とヒント p.303)

***18.1** 次の崩壊を表すクォーク模型のダイヤグラムを描いてみよ．

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \mathrm{K}^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

上記の崩壊の確率振幅が，それぞれ V_{ud} および V_{us} に比例することを示せ．$V_{\mathrm{us}}/V_{\mathrm{ud}} = \tan\theta_{12}$ である．

異なるクォークの質量差を無視すると，問題9.10 で計算した比 $\alpha_{\mathrm{K}}/\alpha_\pi$ は $V_{\mathrm{us}}/V_{\mathrm{ud}}$ に等しい．このことを利用して $\sin\theta_{12}$ を推定せよ．

***18.2** π^0 中間子は荷電共役変換 C の下で偶，すなわち $C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$ である．また $C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$，$C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle$ である．

S状態で，重心が静止している 2-π中間子状態 $|\pi^0, \pi^0\rangle$ や $|\pi^+, \pi^-\rangle$ が，$CP|\pi, \pi\rangle = |\pi, \pi\rangle$ を満たすことを示せ．

***18.3** 3 つの π^0 を含み，角運動量がゼロで重心が静止している状態 $|\pi^0, \pi^0, \pi^0\rangle$ が，$CP|\pi^0, \pi^0, \pi^0\rangle = -|\pi^0, \pi^0, \pi^0\rangle$ を満たすことを示せ (問題18.2 参照)．

***18.4** 図18.5 のユニタリー三角形の面積が $J/2$ であることを示せ．

***18.5** クォーク場の位相を次のように変更することを想定する．

$$d \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\mathrm{d}}} d, \quad b \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{\mathrm{b}}} b$$

このとき図18.5 のユニタリー三角形は角度 $(\theta_{\mathrm{d}} - \theta_{\mathrm{b}})$ だけ回転することを示せ．

第19章

量子異常

標準模型ではレプトンとクォークのフェルミオン場が，ベクトルボゾンの媒介によって相互作用をする．第10章で指摘したように，模型の繰り込み可能性の要請から，局所的ゲージ対称性に基づいてベクトルボゾンが導入される．繰り込みを行うにはラグランジアンに相殺項を導入する必要がある (第8章)．この相殺項が局所的ゲージ対称性と，それに付随する保存カレントを補修するという点が重要である (問題14.6 参照)．このことの帰結として，場を古典場として扱う際に得られる標準模型の大域的なカレント保存則のひとつは，古典場を量子化する際に修正が必要となる．これが“量子異常(アノマリー)”(anomaly) の一例である§．そして，このような効果のために，場の量子論では重粒子数(バリオン)やレプトン数が厳密な保存量にならないことを見る．

19.1 Adler-Bell-Jackiw量子異常

Bell と Jackiw(ジャキーフ)，およびそれとは独立に Adler は場の理論における量子異常(アノマリー)を最初に発見した (Treiman *et al.* 1985 参照)．彼らは 16.7節で導入したカ

§ (訳註) Feynmanダイヤグラムの手法 (これは場の量子化が前提となる) を用いた計算が，もとの古典場理論に備わっていたはずの対称性を破ってしまう現象を一般に“量子異常”と呼ぶ．樹形ダイヤグラムからは量子異常は現れない．原著者が序文で述べている通り，本章は表層的な話の紹介に過ぎず，ダイヤグラムを用いた具体的な考察を省いてあるので，異常項の算出方法を知りたい読者は，他の文献にあたる必要がある．

イラル対称性に関係した軸性ベクトルカレントを考察していた．この量子異常の性質を調べるために，次のモデルラグランジアン密度を考える．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu) - m\right]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{19.1}$$

このラグランジアンは電磁気学的な局所ゲージ対称性を備えており，次の変換の下で不変である．

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\chi(x)}\psi(x)\\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x)\end{aligned} \tag{19.2}$$

もし $m = 0$ であれば，$\mathcal{L}$ も大域的なカイラル対称性を持つ．この場合，次の変換の下で不変である．

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma^5}\psi(x) \tag{19.3}$$

これは γ 行列 (5.5 節) の性質を用いて容易に証明される．

変換 (19.3) の位相 α を空間座標と時間座標に依存する無限小量としてラグランジアン密度 (19.1) に適用すると，$\mathcal{L}$ の変分 $\delta\mathcal{L}$ は (作用積分を部分積分した後で)，

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \alpha(x)\left[\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} - 2\mathrm{i}m\bar{\psi}\gamma^5\psi\right]\\ j^\mu_{\mathrm{A}} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\end{aligned} \tag{19.4}$$

と表すことができる．j^μ_{A} は " 軸性カレント " (axial current) と呼ばれる (問題 5.6 参照)．

Hamilton の原理により，場が従う方程式として，

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}m\bar{\psi}\gamma^5\psi \tag{19.5}$$

が成立する．$m = 0$ であれば，軸性カレントは保存する．

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} = 0 \quad \text{if} \quad m = 0 \tag{19.6}$$

式 (19.5) と式 (19.6) は場を古典場として扱った結果である．場の量子論では，場が量子力学的な演算子になり，カレントは摂動論によって計算される．量子場において電荷を保存し，電磁力学の局所的ゲージ対称性を保つために

は，摂動論において次の条件が必要であることが見出された．

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}m\bar{\psi}\gamma^5\psi - \frac{e^2}{2\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho \tag{19.7}$$

$m = 0$ の場合にも軸性カレントは保存せず，代わりに次のようになる．

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} = -\frac{e^2}{2\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho \tag{19.8}$$

これがAdler-Bell-Jackiwの軸性量子異常 (カイラル量子異常) であって，$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}}$ の唯一の異常項であるということが分かった[§]．問題4.3 の結果を用いて，式 (19.8) を正確にゲージ不変な次の形に直すことができる．

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{A}} = -\frac{e^2}{\pi^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{19.9}$$

式 (19.8) から，次のようなカレントを構築できることは興味深い．

$$j^\mu_{\mathrm{total}} = j^\mu_{\mathrm{A}} + \frac{e^2}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu F_{\lambda\rho} \tag{19.10}$$

このカレントが次式のように保存することは明らかである．

$$\partial_\mu j^\mu_{\mathrm{total}} = 0 \tag{19.11}$$

j^μ_{total} はゲージに依存する (A_ν を含む) ので，物理的に分かりやすい明確な意味を持つわけではない．しかし式 (19.11) から，電荷，

$$Q(t) = \int j^0_{\mathrm{total}}\mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{19.12}$$

は時間に依存しない定数となる．$Q(t)$ はゲージ不変な量である．

19.2 電弱カレントにおける量子異常の相殺

標準模型には，19.1節で述べた軸性量子異常と似た起源と構造を持つ量子異常が存在する．特に電弱相互作用の部分では，たとえば式 (12.15) に示さ

[§] (訳註) 樹形ダイヤグラムだけでなく，3結節点ループを含む一般のダイヤグラムを考慮した量子電磁力学の摂動論では，局所的ゲージ対称性を保持しながら発散を回避 (正則化) することの代償として，軸性カレントに古典場の理論には無い異常項が現れる．

れているように，ゲージボソンがベクトル成分と軸性ベクトル成分の両方を持つカレントに結合する．

$$j_{\mathrm{e}}^{\mu} = \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} = \bar{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1/2)(1-\gamma^{5})\nu_{\mathrm{e}} \tag{19.13}$$

このカレントはベクトルと軸性ベクトルが混合しており，電弱理論の部分の繰り込み可能性を妨げるような量子異常を生じる．詳しい計算によると，クォークを含まないレプトンだけの理論では，量子異常がボソンに結合するカレントの保存則を破綻させ，逆にレプトンを含まないクォークだけの理論でも量子異常が生じる．しかし驚くべきことにレプトンとクォークを両方とも含む理論では，レプトンとクォークの世代数が同じであれば，双方の量子異常が正確に相殺し合って，電弱ゲージカレントは正確に保存する ('t Hooft 1976)．レプトンの世代数とクォークの世代数が等しいという前提が，標準模型の繰り込み可能性を保証するために重要なのである‡．

強い相互作用を媒介するグルーオン場に関しては，深刻な量子異常は存在しない．

19.3　レプトン数と重粒子数の量子異常

古典的な大域的対称性に付随する，レプトン数とクォーク数を保存するカレントを考えよう．各世代のレプトンは保存するカレントを持つ．たとえば電子と電子ニュートリノの世代は，式 (12.28) に与えた保存カレントを持つが，これは次のようにも書ける．

$$J_{\mathrm{e}}^{\mu} = \bar{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}\mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1/2)(1-\gamma^{5})\nu_{\mathrm{e}}$$

古典的には，次のカレント保存が成立する．

$$\partial_{\mu}(J_{\mathrm{e}}^{\mu}) = 0 \tag{19.14}$$

‡ (訳註) 前節のカイラル量子異常が“可換 (Abel的) 量子異常”であるのに対し，本節で言及されている量子異常は“非可換 (非Abel的) 量子異常”である．一般に非可換量子異常は，ゲージ不変性そのものを破綻させ，繰り込みの障害となる可能性がある．しかし理論が異常の相殺条件を満たす場合には，このような困難が回避される．レプトンとクォークの世代数をそろえておくと相殺条件が成立するので，標準模型はゲージ不変で繰り込み可能な量子場理論となっている．

量子化を施すと，このカレントは保存しなくなる．カレントの発散は式 (19.8) と似た方法で修正されて，次のようになる．

$$\partial_\mu(J_{\rm e}^\mu) = \frac{1}{64\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left[\frac{1}{2}g_2^2{\rm Tr}(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}_{\lambda\rho}) - g_1^2 B_{\mu\nu}B_{\lambda\rho}\right] \tag{19.15}$$

場 $\mathbf{W}_{\mu\nu}$，$B_{\mu\nu}$ および結合定数 g_1，g_2 は，第 11 章で導入したものである．

ミュー世代やタウ世代についても同様の結果が得られる．

$$\partial_\mu J_{\rm e}^\mu = \partial_\mu J_{\rm muon}^\mu = \partial_\mu J_{\rm tau}^\mu \neq 0 \tag{19.16}$$

クォークに関しては，古典的に扱っても全クォーク数が保存するだけである．クォーク場を量子化すると，式 (19.15) と同様の異常項が現れる．クォークにも 3 世代があり，各クォークの 3 つの色状態について和を取らなければならないので，次の関係が得られる．

$$\partial_\mu J_{\rm quark}^\mu = 9\,\partial_\mu J_{\rm e}^\mu \tag{19.17}$$

重粒子(バリオン)数はクォーク数の 1/3 なので，

$$\partial_\mu J_{\rm baryon}^\mu = \partial_\mu J_{\rm lepton}^\mu \tag{19.18}$$

とも書ける．$J_{\rm lepton}^\mu = J_{\rm e}^\mu + J_{\rm muon}^\nu + J_{\rm tau}^\mu$ である．

このように，標準模型において古典的に保存される 4 つのカレントは，量子化に伴う量子異常のために 3 つの保存カレントへと減じることになり，それらを $J_{\rm e}^\mu - J_{\rm muon}^\mu$，$J_{\rm muon}^\mu - J_{\rm tau}^\mu$，$J_{\rm baryon}^\mu - J_{\rm lepton}^\mu$ と取ることができる．もうひとつの独立なカレント $J_{\rm baryon}^\mu + J_{\rm lepton}^\mu$ は保存しない．

電子数カレントを考察してみよう．このカレントは保存しないが，カイラル量子異常(アノマリー) (軸性量子異常) のところで見出したように，これに関係した保存カレントは存在する．これを，

$$\partial_\mu(J_{\rm e}^\mu - J_{\rm T}^\mu) = 0 \tag{19.19}$$

$$J_{\rm T}^\mu = \frac{1}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \times\left[\frac{1}{2}g_2^2{\rm Tr}\left(\mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_{\lambda\rho} - {\rm i}\frac{g_2}{3}\mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\lambda\mathbf{W}_\rho\right) - g_1^2 B_\nu B_{\lambda\rho}\right] \tag{19.20}$$

と書くことができる．$J_{\rm T}^\mu$ は“位相カレント”(topological current) と呼ばれ

る．また，

$$N_{\mathrm{T}} = \int J_{\mathrm{T}}^{0} \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{19.21}$$

を“位相数”(topological number) と呼ぶ．

電子数は，

$$N_{\mathrm{e}} = \int J_{\mathrm{e}}^{0} \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{19.22}$$

と定義されるが，式 (19.19) により $N_{\mathrm{e}} - N_{\mathrm{T}}$ が時間に依存しない定数になる．もし N_{T} が ΔN_{T} だけ変化すると，N_{e} も ΔN_{e} 変化し，$\Delta N_{\mathrm{e}} = \Delta N_{\mathrm{T}}$ でなければならない．

19.4　ゲージ変換と位相数

位相数はゲージ不変量だろうか？ 話を簡単にするために，真空場のゲージ変換に相当する場だけを論じる．そうすると式 (11.4b) と式 (11.6) から，

$$B_\mu = (2/g_1)\partial_\mu \theta \tag{19.23}$$

$$\mathbf{W}_\mu = (2\mathrm{i}/g_2)(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger \tag{19.24}$$

である．もちろん場の強度 $B_{\mu\nu}$ や $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ は任意の時空点でゼロである．また，空間内の局所領域におけるゲージ変換を考え，$r \to \infty$ のとき $\theta \to 0$，$\mathbf{U} \to \mathbf{I}$ とする．この真空状態に関する位相数[§]は，式 (19.24) と式 (19.20) を用いると，次のように与えられる．

[§] (訳註) 本書ではフェルミオン数カレントの異常項から“位相数”(19.21) を定義して，その定義を流用してゲージ場の真空を扱っているが，むしろフェルミオンを除いたゲージ場自体の真空状態に関する位相構造的な考察が別にあって，“位相”という術語はそちらに由来すると考えたほうがよい．これに関しては，本節後半の記述と併せて，他の文献で $SU(2)$ ゲージ場の“インスタントン (instanton) 解”の解説も参照してもらいたい．Euclid 時空 (仮想的に虚時間を採用して計量を Euclid 化した時空) における局所解の考察に基づいて，ゲージ場の真空状態の位相的な区別 (“位相数”の代わりに“巻き数 winding number”という術語も使われる) や，それらの状態間の量子論的トンネル過程に関する知見が得られる．そして別途，ダイヤグラムの計算から生じるフェルミオン数カレントの異常項を調べると (式 (19.20) など)，結果的にその積分量が真空ゲージ場の位相数に対応するということである．

$$N_{\rm T} = -\frac{1}{24\pi^2}\int \varepsilon^{0ijk}{\rm Tr}\Big\{(\partial_i \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger(\partial_j \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger(\partial_k \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\Big\}{\rm d}^3\mathbf{x} \tag{19.25}$$

$N_{\rm T}$ は整数 $0, \pm1, \pm2, \ldots$ となることを示すために，式 (B.9) において $\boldsymbol{\alpha} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ と置いた次のユニタリー変換を考える．

$$\mathbf{U}(x) = \cos f(r)\mathbf{I} + {\rm i}\sin f(r)(\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\tau}) \tag{19.26}$$

$f(r)$ は $r \to \infty$ のとき $f(r) \to 0$ になる関数と仮定する．したがって $r \to \infty$ のとき $\mathbf{U} \to \mathbf{I}$ になる．$r = 0$ で $\mathbf{U}(x)$ を定義するためには，そこで $\sin f(r)$ がゼロにならなければならない ($r = 0$ において $\hat{\mathbf{r}}$ が定義できないため)．したがって $f(0) = n\pi$ (n は整数) でなければならない．このように $r = 0$ と $r \to \infty$ だけで境界条件を仮定すれば，$f(r)$ は連続で微分可能な任意の関数と置ける．

$n = 0$ であれば，$f(r)$ を連続的に変形していって，全ての r において $f(r) = 0$，$\mathbf{U} = \mathbf{I}$ にすることができる．このような変換を“小さい”(small) ユニタリー変換と呼ぶ．$n \neq 0$ の場合は $f(r)$ を連続的に変更してすべての r において $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ にすることができない．このような変換を“大きい”(large) ユニタリー変換と呼ぶ．$\mathbf{U}$ を式 (19.26) の形に置いて式 (19.25) を直接計算すると，次のようになる．

$$N_{\rm T} = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2 f {\rm d}f = n \tag{19.27}$$

フェルミオンを含まない理論では，等価でない真空状態の表現が多く存在し，それらは位相数 $N_{\rm T}$ によって区別される．フェルミオンを無視して $SU(2) \times U(1)$ ゲージ場と Higgs場を古典的に扱うと，$N_{\rm T}$ を 1 ずつ変更するには，場の歪みを導入しなければならず，エネルギーが必要であることが分かる．場の位相数を変更する際のエネルギー障壁の高さを推定すると $(4\pi/g_2^2)M_{\rm W}$ の数倍，すなわち $\sim 100M_{\rm W}$ 程度となる．'t Hooft (1976) は場を量子場として扱い，この障壁を介して量子力学的トンネルが生じうることを見出したが，そのトンネル因子は $\exp(-16\pi^2/g_2^2) \approx 10^{-173}$ と小さいために，単位時空体積において $N_{\rm T}$ の変化が生じる確率は極めて低い．

19.5　物質の不安定性と物質の起源

標準模型の中のフェルミオンも含めて考えて，もし Higgs 場とゲージ場が，異なる位相数の状態を隔てているエネルギー障壁を越えることを考えると，フェルミオン場も変わらなければならない．たとえば $\Delta N_{\mathrm{T}} = -1$ と仮定すると，$\Delta N_{\mathrm{e}} = -1$ であり，したがって $\Delta N_{\mathrm{muon}} = -1$，$\Delta N_{\mathrm{tau}} = -1$ である．よって $\Delta N_{\mathrm{lepton}} = -3$ となり，式 (19.18) から $\Delta N_{\mathrm{baryon}} = -3$ となる．これらの条件は，たとえば次の崩壊によって満たされる．

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} \to \mathrm{e}^{+} + \mu^{+} + \bar{\nu}_{\tau} $$

10^{-137} という強い抑制因子が働いているので，我々の銀河系の中のヘリウム原子核は，形成されてから全然このような崩壊をしていない可能性が高い．

しかしながら宇宙の中の物質生成に関して，興味深い異常な機構の可能性が考えられる．宇宙論におけるビッグバンのモデルでは，宇宙進化の初期段階において宇宙の温度は極めて高く，異なる位相数状態を隔てているエネルギー障壁に比べてさえ，充分に高温であったと考えられる．エネルギー障壁を越える熱的ゆらぎは ΔN_{T} の符号に依存して物質もしくは反物質を生成したであろう．正味の重粒子（バリオン）数やレプトン数の初期値は，対称値であるゼロと置くべきである．現在の宇宙において物質が反物質より多く存在していることを説明するには CP 対称性の破れが必要となるが，標準模型にはこの性質が備わっている．

物質の起源を，標準模型とその量子異常に基づいた物質生成の観点から検討した多くの推定によると，現実の宇宙に含まれている物質量は，そのような方法で生成しうる物質量に比べて多すぎる．しかしながら我々が現在手中に収めている標準模型は，そのままの形では物質と放射に関する最終的な理論にはならないものと考えられる．場の量子論における量子異常が，今後，宇宙論の基本的な諸問題の解答を得るために重要な役割を果たしていくことになるかも知れない．

結言

理論の統合は完了したのか？

標準模型が1997年現在までに得られた素粒子物理の実験データの説明に関して，驚くべき成功を収めてきたことは，本書において示した通りである．今後提唱される理論も，現在まで実験が行われているエネルギー範囲に関しては，標準模型と整合するものでなければならない．

解答が得られていない疑問も残っている．電弱相互作用と強い相互作用に関わる各群が $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ のように別々の形で模型に組み込まれており，結合定数が g_1，g_2，g と3つもあるが，これでよいのか？ フェルミオンの質量の起源は，本当に2つのパラメーター (質量と，場の真空期待値) を持つHiggs場に帰することができるものなのか？ 各レプトンの質量は何故このようになっているのか？ 荷電レプトンの質量を決めるパラメーターが3つ存在する．更にクォークに関わる部分で10個のパラメーターが導入される．すなわち6つのクォーク質量と，KM行列を決める4つのパラメーターである．これらの総計18個のパラメーター§は本当にそれぞれ独立なのだろうか？

実験家たちは，より高エネルギー，すなわち更に短い距離における現象を調べることによって，現在の標準模型を構成している各要素が共通に持つ根

---

§ (訳註) 現在ではニュートリノにも有限の質量があると見なされているので (p.77 訳註参照)，これを考慮して本書に示されている最小の標準模型を単純に拡張すると，各世代のニュートリノ質量として3つ，レプトン世代間混合行列を決めるために4つのパラメーターが新たに導入され，パラメーター数は全部で25個になる．

源的な部分に迫る必要があるように思われる．おそらく物質と放射に関する理論の最終的な形態へ向けて，18 個のパラメーターを数個，たとえば 1 個か 2 個にまで減らす試みが，これから続いていくであろう．

付録 A

線形代数の復習

A.1　定義と表記

$m \times n$ 行列 $\mathbf{A} = (A_{ij})$; $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots n$ は，mn 個の数 (一般に複素数) が次のように配列しているものを表している．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} は i 行 j 列の“要素”(element) である．

$\mathbf{A}$ の“複素共役”(complex conjugate) $\mathbf{A}^*$ は，次式で定義される．

$$\mathbf{A}^* = (A_{ij}^*)$$

$\mathbf{A}$ を“転置”(transpose) した行列 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ は $n \times m$ 行列で，

$$A_{ji}^{\mathrm{T}} = A_{ij}$$

と定義される．

$\mathbf{A}$ の“Hermite(エルミート)共役”もしくは“随伴行列”(adjoint matrix) と呼ばれる $\mathbf{A}^\dagger$ は，次式で定義される．

$$A_{ji}^\dagger = A_{ij}^* = A_{ji}^{\mathrm{T}*},\quad \text{もしくは等価的に}\quad \mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^*$$

λ, μ を複素数, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を $m\times n$ 行列とすると, 行列 $\mathbf{C}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{B}$ は次式で定義される.

$$C_{ij}=\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}$$

$m\times n$ 行列 $\mathbf{A}$ と $n\times l$ 行列 $\mathbf{B}$ の積 $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ は $m\times l$ 行列であり, 次のように与えられる.

$$C_{ik}=A_{ij}B_{jk}$$

我々はEinstein(アインシュタイン)の規約を用いる. すなわち繰り返して使われた " ダミー " の添字に関しては, 自動的に和をとるものとする.

$$A_{ij}B_{jk} \quad \text{は} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} \quad \text{を意味する.}$$

積の結合則 $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ が成立する. 定義により即座に以下の関係が導かれる.

$$(\mathbf{AB})^*=\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*, \quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad (\mathbf{AB})^{\dagger}=\mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$$

ブロック行列の積：行列の内部をブロックに分割して, 要素による積の規則と似た規則によって行列積をブロック積から構成できるが, このためにはブロックの行数・列数の関係が整合しなければならない. たとえば,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{AE}+\mathbf{BF} \\ \mathbf{CE}+\mathbf{DF} \end{pmatrix}$$

というブロック演算は, $\mathbf{A}$ の列数が l_1, $\mathbf{B}$ の列数が l_2 とすると, $\mathbf{E}$ の行数が l_1 で $\mathbf{F}$ の行数が l_2 でなければ成立しない. このことは要素の演算による積を書き下すことによって証明できる.

A.2　$n\times n$ 行列の性質

" 正方 " (square) の $n\times n$ 行列に話を限定しよう. $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が $n\times n$ 行列であれば, $\mathbf{AB}$ も $\mathbf{BA}$ も構築できる. 一般に行列の積は順序の入れ替えができない. すなわち通常は $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ である.

$n \times n$ の“恒等行列”(identity matrix) もしくは“単位行列”(unit matrix) と呼ばれる $\mathbf{I}$ は $I_{ij} = \delta_{ij}$ と定義される．δ_{ij} は Kronecker（クロネッカー）の δ（デルタ）で，次のように定義されている．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

行列の積の規則により，任意の $\mathbf{A}$ に関して，

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

が成り立つ．$i \neq j$ の要素がすべて $A_{ij} = 0$ であれば，$\mathbf{A}$ を“対角 (diagonal) 行列”と呼ぶ．

行列式 (determinant)：正方行列 $\mathbf{A}$ に関して，$\det\mathbf{A}$ もしくは $|A_{ij}|$ と表記される“行列式”が次のように定義される (Einstein（アインシュタイン）の和の規約を念頭に置いて式を見よ)．

$$\det\mathbf{A} = \varepsilon_{ij\ldots t} A_{1i} A_{2j} \ldots A_{nt}$$

$$\varepsilon_{ij\ldots t} = \begin{cases} 1 & (i, j, \ldots, t \text{ が } 1, 2, \ldots, n \text{ の偶置換}) \\ -1 & (i, j, \ldots, t \text{ が } 1, 2, \ldots, n \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

次の性質は重要である．

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A} \det\mathbf{B}$$

また，次の性質にも注意されたい．

$$\det\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det\mathbf{A}, \quad \det\mathbf{I} = 1$$

$\det\mathbf{A} \neq 0$ ならば行列 $\mathbf{A}$ は“正則”(non-singular) であり，これは次式を満たす一意的な逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ が存在するための必要充分条件となる．

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

次の性質は自明である．

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

行列 **A** の固有和(trace) Tr**A** は，対角要素の総和と定義される．

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A} = A_{ii}$$

固有和の定義から，次の関係が導かれる．

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{CAB})$$

A.3　Hermite行列とユニタリー行列

正方行列の中でHermite行列とユニタリー (unitary) 行列は，量子力学において特別な重要性を持つ．行列形式の量子力学において，物理的な観測量はHermite行列で表現され，系の時間発展はユニタリー行列で表される．

行列 **H** が，それ自身のHermite共役と等しい，すなわち，

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\dagger}, \quad \text{or} \quad H_{ij} = H_{ji}^{*}$$

である場合，**H** は“Hermite行列”である．したがってHermite行列の対角要素は実数であり，$n \times n$ のHermite行列は $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ 個の実数によって特定できる．

行列 **U** が，

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger}, \quad \text{or} \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{I}$$

を満たすならば，これは“ユニタリー行列”である．2 つのユニタリー行列同士の積も，必ずユニタリー行列になる．

行列 **A** の“ユニタリー変換”(unitary transformation) は，ユニタリー行列 **U** による，次のような変換である．

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{UAU}^{-1} = \mathbf{UAU}^{\dagger}$$

行列積の代数関係は，

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$$

のように変換後も保持され，Hermite共役の関係も，

$$(\mathbf{A}')^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{U}^\dagger$$

のように，そのまま変換される．固有和や行列式も変わらない．

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}' = \mathrm{Tr}\mathbf{A}, \quad \det\mathbf{A}' = \det\mathbf{A}$$

行列代数において重要な定理のひとつは，任意のHermite行列 $\mathbf{H}$ に関して，これを実対角行列 $\mathbf{H}_\mathrm{D}$ に変換するユニタリー行列 $\mathbf{U}$ が必ず存在する，というものである．

$$\mathbf{H}' = \mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{H}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{H}_\mathrm{D}$$

2 つのHermite行列 $\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_2$ が同じユニタリー変換によって対角化できるための必要充分条件は，

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1 = 0$$

である．このことから行列 $\mathbf{M}$ がユニタリー変換によって対角化できるのは，

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger - \mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = 0$$

の場合に限られる (問題A.3 参照)．ユニタリー行列がこの条件を満たすことに注意されたい．

上記の条件を満たさない任意の行列 $\mathbf{M}$ は，2 つのユニタリー行列 ($\mathbf{U}_1$ と $\mathbf{U}_2$ とする) を用いた，より一般化した変換によって次のように実対角行列 $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ へと変換できる (問題A.4 参照)．

$$\mathbf{U}_1\mathbf{M}\mathbf{U}_2^\dagger = \mathbf{M}_\mathrm{D}$$

$\mathbf{H}$ がHermite行列であれば，

$$\mathbf{U} = \exp(\mathrm{i}\mathbf{H})$$

はユニタリー行列となる．上式の右辺は，級数展開の形で定義されるので，

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + (\mathrm{i}\mathbf{H}) + (\mathrm{i}\mathbf{H})^2/2! + \ldots$$

である．ここから次式が得られる．

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{I} + (-\mathrm{i}\mathbf{H}^\dagger) + (-\mathrm{i}\mathbf{H}^\dagger)^2/2! + \ldots \\ &= \exp(-\mathrm{i}\mathbf{H}^\dagger) = \exp(-\mathrm{i}\mathbf{H}) = \mathbf{U}^{-1}\end{aligned}$$

(Hermite(エルミート)共役の操作は項ごとに実施する.) 逆に, 任意のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ を, この形で表現することもできる. $n \times n$ の Hermite(エルミート)行列は n^2 個の実数によって特定できるので, 任意のユニタリー行列も n^2 個の実数で特定できる.

練習問題　(＊解法とヒント p.304)

*A.1 次式を証明せよ.

$$\varepsilon_{ij\ldots t}A_{\alpha i}A_{\beta j}\ldots A_{\nu t} = \varepsilon_{\alpha\beta\ldots\nu}\mathrm{det}\mathbf{A}$$

A.2 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が Hermite(エルミート)行列ならば, $\mathrm{i}(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})$ も Hermite(エルミート)行列になることを示せ.

*A.3 任意の行列 $\mathbf{M}$ が, 2 つの Hermite(エルミート)行列 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を用いて $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathrm{i}\mathbf{B}$ という形で表せることを示せ. $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を, $\mathbf{M}$ と $\mathbf{M}^\dagger$ によって与える式を求めよ. そして $\mathbf{MM}^\dagger - \mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = 0$ の場合にのみ, $\mathbf{M}$ はユニタリー変換によって対角化できることを示せ.

*A.4 $\mathbf{M}$ を任意の正方行列として, $\mathbf{MM}^\dagger$ は Hermite(エルミート)行列であり, ユニタリー行列 $\mathbf{U}_1$ によって,

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{MM}^\dagger)\mathbf{U}_1^\dagger = \mathbf{M}_\mathrm{D}^2$$

のように変換できることを示せ. ただし $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ はゼロ以上の実数だけを要素に持つ対角行列である. 対角要素がすべてゼロではないと仮定しよう. Hermite(エルミート)行列 $\mathbf{H}$ を $\mathbf{H} = \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}\mathbf{U}_1$ と定義する. $\mathbf{V} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}$ がユニタリー行列となり, 次のように書けることを示せ.

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}\mathbf{U}_2$$

ここで $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1\mathbf{V}$ もユニタリー行列である.

付録 **B**

標準模型で扱う群

標準模型は，ある種の変換前後で場の方程式が同じ形を持つことを基本原理として構築されている．たとえば方程式があらゆる慣性系において同じ形を持つことを要求するので，式は Lorentz 変換の下で共変である．この Lorentz 変換は，空間座標軸の回転または等速推進(ブースト)，もしくは回転と等速推進(ブースト)を組み合わせた変換である．標準模型を記述するラグランジアン密度は新しい座標系でも同じ形を持ち，Lorentz 変換はラグランジアン密度の“対称変換”(symmetry transformation) になっている．標準模型は空間座標変換の下での対称性だけでなく，粒子場の“内部”対称性 (‘internal’ symmetry) を備えている．内部対称性に関する変換は，行列によって簡便に記述される．

対称変換は，数学における“群”(group) の公理を満たすので，まず群の定義を示し，それから標準模型において特別な役割を持つ群の具体例を考察する．

B.1　群の定義

G が要素[§]$a, b, c, \ldots$ から成り，その中の任意の 2 つの要素 a，b から ab を作る演算 (積) が決められており，その ab も必ず G に属するものとする (積の閉律)．そして演算が次の規則に従う場合に G を“群”と称する．

§ (訳註) element．“元”(げん) と訳される場合もある．

(i) 結合律を満たす：$a(bc) = (ab)c$

(ii) G は“単位要素”I をひとつだけ持つ．I は G に属する任意の要素 a に関して $aI = Ia = a$ を成立させる．

(iii) G に属する任意の要素 a に対して，それぞれ唯一の“逆要素”a^{-1} が G の中に存在する．要素と逆要素は $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ を満たす．

もし任意の a，b に関して $ab = ba$ であれば，その群を“可換群”または“Abel（アーベル）群”と呼ぶ．

与えられたひと揃（そろ）いの要素と演算規則が，群の公理を満たしているかを判断することは，通常は容易である．たとえば全整数は加法演算の下で Abel 群を成しており，単位要素は 0 である．正則なすべての $n \times n$ 行列 $(n > 1)$ は，行列積の演算の下で非 Abel 群を成している．数列 $1, 2, \ldots, n$ の数を任意に置換したものは，$n!$ 個の要素を持つ群を形成する．これは“有限群”(finite group) の一例である．座標軸の回転は 3 パラメーターの“連続群”(continuous group) であって，その要素は連続値をとる 3 つのパラメーターによって特定される．我々は主に，連続群に関わることになる．

B.2　座標軸の回転と $SO(3)$

原点を中心とする座標軸の回転を考えよう．ある点 P が，座標系 K では (x^1, x^2, x^3)，K に回転を施した座標系 K' では (x'^1, x'^2, x'^3) であるとすると，x'^i と x^i は次のような形の実線形変換で関係づけられる．

$$x'^i = R^i{}_j x^j \tag{B.1}$$

$\mathbf{R} = (R^i{}_j)$ は“回転行列”(rotation matrix) である[§]．たとえば 03 軸のまわりの角度 θ の右回転は，

§ (訳註) 3 次元空間内の回転行列を，添字の上付き／下付きを区別して $R^i{}_j$ のように表記しても実質的な利点はないが，形式的に Lorentz 変換 (2.4) における $L^\mu{}_\nu \equiv \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ と同様に $R^i{}_j \equiv \partial x'^i / \partial x^j$ とする．添字の上下の使い分けの考え方をよく理解したい読者は，一般相対性理論を解説した書籍を参照するとよい．

$$
\begin{aligned}
x'^1 &= x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \\
x'^2 &= -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \\
x'^3 &= x^3
\end{aligned}
$$

と表され，これに対応する行列は次のようになる．

$$
\mathbf{R}_{03}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.2}
$$

x'^i と x^i は，3×1 行列 $\mathbf{x}'$，$\mathbf{x}$ と見なしてもよいので，変換 (B.1) を次のようにも書ける．

$$
\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}
$$

$\mathbf{x}$ の転置 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ は 1×3 行列で，2 つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のスカラー積は，

$$
x^i y^i = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}
$$

である．OP の長さは $\sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$ と与えられる．座標軸の回転はスカラー積を保存するので，

$$
\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{y}' = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}
$$

である．これは“ あらゆる ” $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の組合せに関して成立するので，

$$
\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{B.3}
$$

となる．$\mathbf{I}$ は単位行列である．よって $\mathbf{R}$ の逆行列は，転置 $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ であり，このような性質を持つ $\mathbf{R}$ は“ 直交行列 ” (orthogonal matrix) と呼ばれる．

$\det\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\det\mathbf{R} = \det(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}) = \det\mathbf{I} = 1$ であり，$\det\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \det\mathbf{R}$ なので，

$$
(\det\mathbf{R})^2 = 1, \quad \det\mathbf{R} = \pm 1 \tag{B.4}
$$

である．純粋な回転，すなわち“固有 (proper) 回転‡”に対応する行列は $\det\mathbf{R} = +1$ となる．このことは恒等変換 (無回転) が固有回転に属し，$\det\mathbf{I} = 1$ であ

‡ (訳註) 座標軸の反転を含まない通常の回転．

ることに注意すれば分かる．任意の固有回転は $\mathbf{I}$ から始まる無限小回転の繰り返しによって構築することが可能であって，その連続性から行列式は常に $+1$ となる．

2 つの直交行列同士の積も，

$$(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1^{-1} = (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^{-1}$$

なので直交行列となり，もし $\det\mathbf{R}_1 = 1$ かつ $\det\mathbf{R}_2 = 1$ であれば，

$$\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det\mathbf{R}_1\det\mathbf{R}_2 = 1$$

となる．$\det\mathbf{R} = 1$ の 3×3 直交行列は，行列積の演算の下で群を形成する．この群は“特殊直交群”(special orthogonal group) と呼ばれるもので，$SO(3)$ と記される．

$\det\mathbf{R} = -1$ の直交行列もスカラー積を保存する．座標原点に関する反転操作 $x'^i = -x^i$ が行列式 -1 を持つ直交行列に属することは容易に確認できる．一般の“非固有 (improper) な回転”は，原点に関する座標反転と固有回転を組み合わせたものにあたる．非固有回転を表す行列同士の積は固有回転となるので，非固有回転の行列は群を形成しない．

一般の固有回転は，異なる軸のまわりの 3 回の回転の角度によって表現できる．たとえば，

$$\mathbf{R}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_{03''}(\psi)\mathbf{R}_{02'}(\theta)\mathbf{R}_{03}(\phi) \tag{B.5}$$

を考えよう．表記の意味は明らかである．$03''$ 軸の方向は，その前に行われた回転の角度 θ と ϕ によって決まり，ψ は $03''$ に垂直な面内の $01''$ 軸と $02''$ 軸の回転を決める．このようにして $SO(3)$ に属する任意の要素は 3 つのパラメーターによって特定できる (ψ, θ, ϕ はEuler（オイラー）角と呼ばれる)．

変換 (B.1) を“能動的”(active) な意味に捉え直すことも可能である．座標系 K において波動関数 $\Phi(\mathbf{x})$ によって記述される状態を考えよう．この状態は座標系 K' からは $\Phi'(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')$ と記述される．これは“受動的”(passive) な解釈である．しかし，代わりに座標のプライム記号を除いて，この式を能動的に解釈してもよい．すなわち座標軸は固定されていて，状態関数が逆の回転 $\mathbf{R}^{-1}$ を施されたものと考える．この場合，回転後の波動関数は

$\Phi'(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$ と表される．

B.3　$SU(2)$

$n \times n$行列 $\mathbf{U}$ が $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$ を満たすならば，これは“ユニタリー行列”である．2つのユニタリー行列同士の積もユニタリー行列になるので，$n \times n$ユニタリー行列は，行列積の演算の下で群を形成する．この“ユニタリー群”(unitaty group) のことを $U(n)$ と記す．

$$\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) = \det\mathbf{U}\det\mathbf{U}^\dagger = \det\mathbf{U}(\det\mathbf{U})^* = \det\mathbf{I} = 1$$

なので，$\det\mathbf{U} = \mathrm{e}^{in\alpha}$ と書くことができる．α は実数である．

“特殊ユニタリー群”(special unitary group) $SU(2)$ は，2×2ユニタリー行列の中で，行列式が1のものによって構成される群のことである．$\det\mathbf{U}_1 = 1$ かつ $\det\mathbf{U}_2 = 1$ であれば $\det(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2) = \det\mathbf{U}_1\det\mathbf{U}_2 = 1$ なので，これらの行列は群を形成する．$SU(2)$ は $U(2)$ の“部分群”(sub-group) であって，$U(2)$ が含むすべての要素は，$SU(2)$ の要素と，$U(1)$ の要素である位相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ との積で表すことができる．

$SU(2)$ は特別な方法によって，B.2節で扱った $SO(3)$ と関係づけられる．この群は標準模型の電弱理論の部分において，中心的な役割を果たす．

$U(2)$ の任意の要素は，

$$\mathbf{U} = \exp(\mathrm{i}\mathbf{H})$$

と書ける．$\mathbf{H}$ はHermite（エルミート）行列である (付録A)．一般に 2×2 のHermite（エルミート）行列を，次のように置くことができる．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^0 + \alpha^3 & \alpha^1 - \mathrm{i}\alpha^2 \\ \alpha^1 + \mathrm{i}\alpha^2 & \alpha^0 - \alpha^3 \end{pmatrix}$$

ここで α^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は4つの実数パラメーターである．上式は次のように書き直せる．

$$\mathbf{H} = \alpha^0\mathbf{I} + \alpha^k\sigma^k \tag{B.6}$$

添字 k は1から3までの値をとり，σ^k はPauliのスピン行列と同じく，

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であって，次の関係式を満たす．

$$\begin{aligned} &(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = (\sigma^3)^2 = \mathbf{I}; \quad \sigma^j\sigma^k + \sigma^k\sigma^j = 0 \quad (j \neq k) \\ &\left[\sigma^1, \sigma^2\right] = \sigma^1\sigma^2 - \sigma^2\sigma^1 = 2\mathrm{i}\sigma_3, \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{B.7}$$

単位行列 $\mathbf{I}$ は，あらゆる行列と交換可能なので，$U(2)$ の任意の要素は次のように書ける．

$$\mathbf{U} = \exp\mathrm{i}(\alpha^0\mathbf{I} + \alpha^k\sigma^k) = \exp(\mathrm{i}\alpha^0)\exp(\mathrm{i}\alpha^k\sigma^k)$$

位相因子 $\exp(\mathrm{i}\alpha^0)$ は $U(1)$ に属している．したがって $SU(2)$ の要素は，

$$\mathbf{U}_\mathrm{s} = \exp(\mathrm{i}\alpha^k\sigma^k) \tag{B.8}$$

と表される．つまり $SU(2)$ の要素は，3 つのパラメーター α^k によって特定できる．行列 σ^k はそれらのパラメーターに対応する群の“生成子[§]”(generator) であって，各生成子の固有和（トレース）はゼロである (問題B.1 参照).

σ^k の代数を利用することにより，$SU(2)$ の要素を閉じた形で表すことができる．形式的に α^k がベクトル $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ を作るものと考える．$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は単位ベクトルである．そして“スカラー積”$\alpha^k\sigma^k$ を $\alpha\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ と書く．$\sigma^i\sigma^k + \sigma^k\sigma^i = 0$, $(\sigma^1)^2 = \mathbf{I}$ などの関係から，容易に，

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \hat{\alpha}^j\sigma^j\hat{\alpha}^k\sigma^k = \hat{\alpha}^j\hat{\alpha}^j\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

となることが示される．そうすると式 (B.8) の冪（べき）展開は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\mathrm{s} &= \mathbf{I} + \mathrm{i}\alpha(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \frac{(\mathrm{i}\alpha)^2}{2!}\mathbf{I} + \ldots \\ &= \cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \tag{B.9}$$

$SU(2)$ と $SO(3)$ の関係を示すために，点 $\mathbf{x}$ に対して，次の Hermite（エルミート）行列を対応させる．

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

§ (訳註) p.141 訳註参照.

この行列は $\mathrm{Tr}\mathbf{X}=0$，$\det\mathbf{X}=-x^k x^k$ である．

$\mathbf{U}$ を $SU(2)$ の要素として ($\mathbf{U}$ の添字 s は省略する)，次の行列を考える．

$$\mathbf{X}'=\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger \tag{B.11}$$

$\mathbf{X}'$ も Hermite（エルミート）行列で，$\mathrm{Tr}\mathbf{X}'=\mathrm{Tr}(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger)=\mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{X})=\mathrm{Tr}\mathbf{X}=0$ である．したがって $\mathbf{X}'$ も，

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} x'^3 & x'^1-\mathrm{i}x'^2 \\ x'^1+\mathrm{i}x'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}$$

という形で表される．x'^k と x^k は実数の線形変換によって関係づけられる．

また $\det\mathbf{X}'=\det\mathbf{U}\det\mathbf{X}\det\mathbf{U}^\dagger=\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger)\det\mathbf{X}=\det\mathbf{X}$ なので $x'^k x'^k=x^k x^k$ である．$\mathbf{x}$ の長さは保存され，変換は単位行列 (恒等変換) から連続的に生成されるので (問題 B.3 参照)，変換 $\mathbf{U}$ は座標軸の固有回転に対応し，それを表す回転行列 $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ と対応させることができる．

一例として，$SU(2)$ の行列，

$$\begin{aligned}\mathbf{U}=\exp\left[\mathrm{i}(\theta/2)\sigma^3\right]&=\cos(\theta/2)\mathbf{I}+\mathrm{i}\sin(\theta/2)\sigma^3\\ &=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{B.12}$$

(ここで式 (B.9) を用いた) は，式 (B.2) の回転行列 $\mathbf{R}_{03}(\theta)$ に対応する．このことは直接に行列積の計算からも証明できる．

行列 $\mathbf{U}$ と $-\mathbf{U}$ は，式 (B.11) において同じ変換を与えるので，同じ回転行列に対応する．$SO(3)$ のすべての要素に関して，それぞれに因子 -1 だけ異なる $SU(2)$ の 2 つの要素が対応している．上式 (B.12) の例では，03 軸のまわりの θ 回転と $\theta+2\pi$ 回転は同じ回転行列で表現されるが，$SU(2)$ においては $\mathbf{U}$ と $-\mathbf{U}$ のように別個の 2 つの要素となる．

B.4　$SL(2,\mathrm{C})$ と固有 Lorentz 群

2×2 複素行列の中で行列式が 1 のものが，行列積の演算の下で群を形成す

ることは明白である．この群のことを $SL(2,\mathrm{C})$ と記す§．$SU(2)$ が固有回転に関係しているのと同様に，$SL(2,\mathrm{C})$ は固有Lorentz変換に関係する．

時空点 $x=(x^0,\mathbf{x})$ を，次のHermite（エルミート）行列に対応させる．

$$\mathbf{X}(x)=\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-\mathrm{i}x^2 \\ x^1+\mathrm{i}x^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} \tag{B.13}$$

この行列式は，次のように与えられる．

$$\det\mathbf{X}=(x^0)^2-x^kx^k$$

$SL(2,\mathrm{C})$ の要素 $\mathbf{M}$ と，次式で与えられる行列 $\mathbf{X}'$ を考えよう．

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{X}'\mathbf{M}=\mathbf{X} \quad \text{or} \quad \mathbf{X}'=(\mathbf{M}^{-1})^\dagger\mathbf{X}\mathbf{M}^{-1} \tag{B.14}$$

$\mathbf{X}'$ もHermite（エルミート）行列なので，次のように書ける．

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix} x'^0+x'^3 & x'^1-\mathrm{i}x'^2 \\ x'^1+\mathrm{i}x'^2 & x'^0-x'^3 \end{pmatrix}$$

x'^μ と x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ は，実数の線形変換で関係づけられる．

また，

$$\det\mathbf{M}^\dagger\mathbf{X}'\mathbf{M}=\det\mathbf{M}^\dagger\det\mathbf{X}'\det\mathbf{M}=\det\mathbf{X}'=\det\mathbf{X}$$

なので，

$$(x'^0)^2-x'^kx'^k=(x^0)^2-x^kx^k$$

である．すなわち行列 $\mathbf{M}$ はLorentz変換行列 $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ に対応する．行列 $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ は，恒等変換 $\mathbf{L}(\mathbf{I})=\mathbf{I}$ を含む群を形成するので，連続性により固有Lorentz変換に対応することが分かる．

慣性系 K と K' の間の一般の固有Lorentz変換は6つのパラメーターによって特定される．それは K に対する K' の相対速度 $\mathbf{v}$ の成分3つと，K から K' の座標軸方向の回転を決める3つのパラメーターである．一般の 2×2 複素行

§ (訳註) $SL(n,\mathrm{C})$ の SL は特殊線形群 (Special Linear group) の意味．C は行列要素が複素数 (Complex) であることを表す．

列は8つの実数パラメーターによって特定されるが，特殊群の条件 $\det\mathbf{M} = 1$ を与えると，パラメーターは6つに減る．したがって，あらゆる固有Lorentz変換に対して，それに対応する行列 $\mathbf{M}$ を用意できる．行列 $\mathbf{M}$ と行列 $-\mathbf{M}$ は式 (B.14) において同じ変換を与えるので，固有Lorentz群の各要素に対して，$SL(2, \mathrm{C})$ の2つの要素が対応する．

次の行列，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} = \exp\bigl[(\theta/2)\sigma^3\bigr] &= \cosh(\theta/2)\mathbf{I} + \sinh(\theta/2)\sigma^3 \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

は，第2章のLorentz等速推進(ブースト)(2.3) と対応している．このことは行列積の計算から直接に証明することもできる．

より一般に慣性系 K から，単位ベクトル $\hat{\mathbf{v}}$ の方向に速度 $v = \tanh\theta$ で動く慣性系 K' への等速推進(ブースト)は，次式で与えられる．

$$
\mathbf{P} = \exp\bigl[(\theta/2)\hat{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\bigr] = \cosh(\theta/2)\mathbf{I} + \sinh(\theta/2)\hat{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\sigma}
$$

ここで $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ である．

σ^k はHermite(エルミート)行列なので，任意の行列 $\mathbf{P}$ が等速推進(ブースト)に対応することに注意されたい．

B.5 Pauli行列の変換

Lorentz変換を論じるにあたり，$\mathbf{I} = \sigma^0$ と置き，次の表記を採用すると便利である．

$$
\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)
\tag{B.16}
$$

式 (B.13) などは，次のように書ける．

$$
\mathbf{X}(x) = x^0\sigma^0 + x^k\sigma^k = x_\mu\tilde{\sigma}^\mu, \quad \mathbf{X}'(x') = x'_\mu\tilde{\sigma}^\mu
$$

ここで，式 (B.14) の関係，

$$
\mathbf{M}^\dagger\mathbf{X}'\mathbf{M} = \mathbf{X}
$$

は，次のように表される (問題2.2 参照).

$$x'_\mu \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = x_\nu \tilde{\sigma}^\nu = L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu x'_\mu$$

x'_μ は任意なので，

$$\mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M} = L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu \tag{B.17}$$

という関係式が導かれる．また，次式も成立する (問題B.6).

$$L^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu \mathbf{M}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathbf{M})$$

上記と同様に，

$$\mathbf{X}_1(x) = x^0\sigma^0 - x^k\sigma^k = x_\nu\sigma^\nu$$

という行列を考えても $\det\mathbf{X}_1 = (x^0)^2 - x^k x^k$ であり，やはり $SL(2, \mathrm{C})$ の要素の中に次式を満たす行列 $\mathbf{N}$ が存在することを証明できる．

$$\mathbf{N}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{N} = L^\mu{}_\nu \sigma^\nu \tag{B.18}$$

行列 $\mathbf{M}$ と行列 $\mathbf{N}$ が対応関係を持つことは明白である．$\mathbf{P}$ が式 (B.15) のように z 方向の Lorentz等速推進(ブースト)に対応していて $\mathbf{M} = \mathbf{P}$ であれば，$\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}$ であることを証明できる．このことは任意方向の等速推進(ブースト)にも当てはまる．単なる座標軸の回転に関しては $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$ はユニタリー行列) と置ける．一般の $\mathbf{M}$ は回転と等速推進(ブースト)の組合せとして $\mathbf{M} = \mathbf{PU}$ という形で構築できる．これに対応する $\mathbf{N}$ は $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$ と与えられる．

$\mathbf{U}$ は $\mathbf{UU}^\dagger = \mathbf{I}$ を満たすので，$\mathbf{P}$ は Hermite(エルミート)行列であって $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$ である．したがって，

$$\mathbf{NM}^\dagger = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U})(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{P}) = \mathbf{I} \tag{B.19}$$

となる．すなわち $\mathbf{N}$ は $\mathbf{M}^\dagger$ の逆行列である．

式 (B.17) と式 (B.18) は，式 (B.19) の関係と併せて，Lorentz変換におけるスカラー，ベクトル，および高階テンソルを構築するために有用である．

B.6 スピノル

“左手型スピノル”は2つの複素数成分を持つ，

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

のような量であって，変換行列 $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ の Lorentz変換の下で，

$$\mathbf{l}' = \mathbf{M}\mathbf{l} \tag{B.20}$$

という変換性に従うものと定義される．すなわち $l'_a = M_{ab} l_b$ である (a, b は $1, 2$ の値をとる)．

同様に“右手型スピノル”，

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

も，次の変換性によって定義される．

$$\mathbf{r}' = \mathbf{N}\mathbf{r}$$

標準模型では，電子をはじめとするフェルミオンはすべて，スピノル場によって記述される．“左手型”および“右手型”という命名の意味については6.3節から推察できる[§]．

スピノルは，対(つい)の組合せによって Lorentzスカラー，4元 Lorentzベクトル，あるいはさらに高階の Lorentzテンソルを作ることができるという注目すべき性質を持っている．たとえば $\mathbf{l}^\dagger \mathbf{r} = l_a^* r_a$ が (複素) Lorentzスカラーであることは，次式によって理解できる．

$$\mathbf{l}'^\dagger \mathbf{r}' = (\mathbf{M}\mathbf{l})^\dagger \mathbf{N}\mathbf{r} = \mathbf{l}^\dagger \mathbf{M}^\dagger \mathbf{N}\mathbf{r} = \mathbf{l}^\dagger \mathbf{r} \tag{B.22}$$

上式には (B.19) を用いた．

次のような量，

$$\mathbf{l}^\dagger \tilde{\sigma} \mathbf{l} = \mathbf{l}^\dagger (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \mathbf{l}$$
$$\mathbf{r}^\dagger \sigma \mathbf{r} = \mathbf{r}^\dagger (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \mathbf{r}$$

[§] (訳註) p.81 訳註参照．

は (実数の) 反変 4 元ベクトルのように変換する．式 (B.17) により，

$$\mathbf{l}'^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathbf{l}' = \mathbf{l}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathbf{M}\mathbf{l} = L^{\mu}{}_{\nu}(\mathbf{l}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}\mathbf{l}') \tag{B.23}$$

であり，式 (B.18) により，

$$\mathbf{r}'^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{r}' = \mathbf{r}^{\dagger}\mathbf{N}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{N}\mathbf{r} = L^{\mu}{}_{\nu}(\mathbf{r}^{\dagger}\sigma^{\nu}\mathbf{r}) \tag{B.24}$$

となるからである．

B.7　$SU(3)$

特殊ユニタリー群 $SU(3)$ は，行列式が 1 となる 3×3 ユニタリー行列によって構成される群のことである．本節の議論は B.3節の $SU(2)$ に関する議論と同様である．$SU(3)$ の要素は，

$$\mathbf{U} = \exp(\mathrm{i}\mathbf{H})$$

と表される．$\mathbf{H}$ は 3×3 の Hermite(エルミート)行列である．一般に 3×3 の Hermite(エルミート)行列は $3^2 = 9$ 個の実数パラメーターによって特定されるが (付録 A)，$\det\mathbf{U} = 1$ もしくはこれと等価な $\mathrm{Tr}\mathbf{H} = 0$ (問題 B.1) という条件によって，パラメーターはひとつ減って 8 個になる．ここでは群の生成子として B.3節で用いた σ^k 行列の代わりに，Gell-Mann(ゲルマン)によって導入された固有和(トレース)がゼロの 8 つの Hermite(エルミート)行列が必要となる．

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_8 = (1/\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{B.25}$$

固有和(トレース)がゼロの一般のHermite(エルミート)行列は，次の形で表すことができる．

$$\mathbf{H} = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_8\lambda_8$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_8/\sqrt{3} & \alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2 & \alpha_4 - \mathrm{i}\alpha_5 \\ \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 & -\alpha_3 + \alpha_8/\sqrt{3} & \alpha_6 - \mathrm{i}\alpha_7 \\ \alpha_4 + \mathrm{i}\alpha_5 & \alpha_6 + \mathrm{i}\alpha_7 & -2\alpha_8/\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

行列 λ_a は，次の交換関係を満たす．

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2\mathrm{i}\sum_{c=1}^{8} f_{abc}\lambda_c \tag{B.27}$$

f_{abc} は構造定数である (式 (B.7) 参照)．f_{abc} は添字の任意の組合せの交換に関して奇であり，ゼロでない f_{abc} は $f_{123} = 1$，$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$，$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$ から，添字の置換によって与えられる．

これらの行列は，次の性質も持つ．

$$\mathrm{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab} \tag{B.28}$$

δ_{ab} はKronecker(クロネッカー)の δ(デルタ) である‡．

これらの結果は直接的な計算によって証明できる．

練習問題　(＊解法とヒント p.304)

*B.1 $\mathbf{U} = \exp(\mathrm{i}\mathbf{H})$ で $\mathrm{Tr}\mathbf{H} = 0$ であれば，$\det\mathbf{U} = 1$ となることを示せ．($\mathbf{H}$ をユニタリー変換によって対角化せよ．その場合は $\mathbf{U}$ も対角行列になる．)

*B.2 $SU(2)$ 行列 $\exp\left[\mathrm{i}(\theta/2)\sigma^1\right]$ と $\exp\left[\mathrm{i}(\theta/2)\sigma^2\right]$ は，それぞれ回転 $R_{01}(\theta)$ および $R_{02}(\theta)$ に対応することを示せ．

*B.3 回転 $R(\psi, \theta, \phi)$ (式 (B.5)) に対応する $SU(2)$ 行列は，次の行列であることを示せ．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2}\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2}\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2}\cos(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \end{pmatrix}$$

---

‡ (訳註) p.141 訳註のように，生成子 T_a の規格化条件を慣例に従って $\mathrm{Tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ とするなら，$SU(3)$ の生成子は $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ である．

*B.4 $\mathbf{l}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\mathbf{r}$ はテンソルとして変換し，$\mathbf{l}^\dagger(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\mathbf{r} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{l}^\dagger\mathbf{r}$ であることを示せ．

*B.5 式 (B.1) の回転行列 ${R^i}_j$ は，式 (B.11) の $SU(2)$ 行列 $\mathbf{U}$ と，次のように関係することを示せ．

$$ {R^i}_j = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{U}\sigma^i\mathbf{U}^\dagger\sigma^j) $$

*B.6 式 (B.17) により，次式が成立することを示せ．

$$ {L^\mu}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{M}) $$

付録 C

消滅演算子・生成演算子

C.1　調和振動子

読者は量子力学によって調和振動子 (harmonic oscillator) を扱った際に，エネルギー量子の消滅演算子と生成演算子を目にしたであろう．調和振動子の議論から演算子 a と，その Hermite（エルミート）共役 $a^\dagger$ が構築される．これらは次の交換関係を満たす．

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \tag{C.1}$$

また，当然のことながら，

$$[a, a] = 0, \quad [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

である．

$N = a^\dagger a$ は Hermite（エルミート）演算子である．規格化された N の固有状態で，固有値 n を持つものを $|n\rangle$ と記す．$n = \langle n|a^\dagger a|n\rangle$ は，状態ベクトル $a|n\rangle$ の大きさの絶対値の自乗にあたるので，n は実数で $n \geq 0$ であり，$a|n\rangle = 0$ の場合だけに $n = 0$ となる．

交換関係から必然的に最小の固有値は $n = 0$ で，これに対応する基底状態は $|0\rangle$ である．このことは次式から判る．

$$Na|n\rangle = a^\dagger aa|n\rangle = (aa^\dagger - 1)a|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

$a|n\rangle$ は $a|n\rangle = 0$ とならない限り，規格化されていない N の固有状態であ

り，固有値は $(n-1)$ である．同様に $a|n-1\rangle$ も N の固有状態で，固有値は $(n-2)$ である．このように a によって固有値を下げる作業を続けると，固有値 0 の状態 $|0\rangle$ のところで $a|0\rangle = 0$ となり，その先は $n \geq 0$ の条件を破ることになるので作業は終了する．

同じように $a^\dagger|n\rangle$ も規格化されていない N の固有状態であり，固有値は $(n+1)$ である．したがって"個数演算子"N の固有値として許容される値は，整数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ である．

$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = n$ なので，次式が得られる．

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle \tag{C.2}$$

また，$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = n+1$ なので，

$$a^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle \tag{C.3}$$

である．

a を"消滅演算子"(annihilation operator)，$a^\dagger$ を"生成演算子"(creation operator) と呼ぶ．

調和振動子のハミルトニアンは，a と $a^\dagger$ を用いると，次のように表される．

$$H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{C.4}$$

ω はこの系に対応する古典的な振動子の固有角振動数である (問題C.1)．後ろの項 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ はゼロ点エネルギーを表す．場の理論ではエネルギーの差だけが物理的に重要なので，ゼロ点エネルギーを省いてハミルトニアンを $H = a^\dagger a\hbar\omega$ と定義し直すと便利である．ここで振動子の描像から離れて，状態 $|n\rangle$ を，エネルギー $\hbar\omega$ の同種"粒子"が n 個ある状態と解釈してみる．a は粒子を消滅させ，$a^\dagger$ は粒子を生成する作用を持つ．

Heisenberg表示 (8.2節) では，

$$a(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega t}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a \tag{C.5}$$

である．これは，

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}N\omega t}|n\rangle = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle$$

という関係から $a(t)$ を表す 2 通りの式が同じ結果を与えることに注意して

$a(t)$ を $|n\rangle$ に作用させると分かる．同様に，

$$a^\dagger(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} a^\dagger \tag{C.6}$$

である．

C.2 ボゾン系

同種粒子の多粒子系においても調和振動子と似た演算子形式を構築できる．まず粒子がボゾンの場合を扱う．

$u_i(\xi)$ が 1 粒子状態の完全系を成しているものとしよう．ξ は 1 粒子の空間座標とスピン座標を表す．各 1 粒子状態に対して，次の交換関係を満足する消滅演算子 a_i と生成演算子 $a_i^\dagger$ を定義する．

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \tag{C.7}$$

系の任意の状態は，粒子を全く含まず，すべての i に関して $a_i|0\rangle = 0$ である"真空状態"(vacuum state) $|0\rangle$ と生成演算子から構築できる．たとえば状態 u_1 に 2 つ，状態 u_2 にひとつの粒子がある 3 粒子状態は (規格化を除いて考えると) $a_1^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle$ と与えられる．生成演算子同士は交換可能なので，このような状態は明らかに任意の 2 つの粒子の交換に関して対称であって，粒子はBose-Einstein（ボーズ アインシュタイン）統計に従う．

交換関係により，粒子数演算子 $N_i = a_i^\dagger a_i$ は状態 u_i にある粒子の数を与える．相互作用のないボゾン系の場合，$u_i(\xi)$ を 1 粒子のエネルギー固有状態にすれば，系のハミルトニアンは，

$$H_0 = \sum_i a_i^\dagger a_i \varepsilon_i = \sum_i N_i \varepsilon_i \tag{C.8}$$

と書ける．ε_i は 1 粒子のエネルギー準位である．

Heisenberg表示において，自由粒子系のハミルトニアン H_0 を採用するなら，生成演算子と消滅演算子の時間依存性は，調和振動子のそれと同じようになる．

$$a_i(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_i t} a_i, \quad a_i^\dagger(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_i t} a_i^\dagger \tag{C.9}$$

C.3　フェルミオン系

同種のフェルミオンを含む多粒子系の場合，それぞれの1粒子状態 $u_i(\xi)$ に関して定義される消滅演算子 b_i と生成演算子 $b_i^\dagger$ は，次の“反交換関係”を満たす．

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = b_i b_j^\dagger + b_j^\dagger b_i = \delta_{ij}, \quad \{b_i, b_j\} = 0, \quad \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0 \tag{C.10}$$

後者の2つの式により，

$$(b_i)^2 = 0, \quad (b_i^\dagger)^2 = 0 \tag{C.11}$$

なので，同じ1粒子状態において2つのフェルミオンを消滅させたり生成させたりするのは不可能であり，Pauliの排他律と整合している．

個数演算子 $N_i = b_i^\dagger b_i$ は次式を満たす．

$$N_i^2 = b_i^\dagger b_i b_i^\dagger b_i = b_i^\dagger(1 - b_i^\dagger b_i)b_i = b_i^\dagger b_i = N_i$$

これは，

$$N_i(N_i - 1) = 0$$

と書き直すこともできるので，N_i の固有値として許容されるのは0か1だけである．これもPauliの排他律と整合している．フェルミオンの多粒子系は真空状態 $|0\rangle$ と生成演算子を用いて作ることができる．たとえば $b_1^\dagger b_2^\dagger b_5^\dagger|0\rangle$ は u_1，u_2，u_5 の各状態にひとつずつフェルミオンがある状態を表す．このような状態は粒子の交換に関して反対称であり，粒子はFermi-Dirac統計に従う．

粒子間の相互作用のないフェルミオン系のハミルトニアンは，

$$H_0 = \sum_i b_i^\dagger b_i \varepsilon_i \tag{C.12}$$

と表され，Heisenberg表示では，演算子は次のように時間に依存する．

$$b_i(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_i t} b_i, \quad b_i^\dagger(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_i t} b_i^\dagger \tag{C.13}$$

練習問題　(＊解法とヒント p.306)

C.1　調和振動子のハミルトニアン，

$$H = (p^2/2m) + (m\omega^2 x^2/2)$$

において，変数を，

$$P = p/(m\hbar\omega)^{1/2}, \quad X = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$$

のように変換すると，次のようになる．

$$H = (\hbar\omega/2)(P^2 + X^2), \quad [X, P] = \mathrm{i}$$

ここで，$a = \left(1/\sqrt{2}\right)(X + \mathrm{i}P)$，$a^\dagger = \left(1/\sqrt{2}\right)(X - \mathrm{i}P)$ と置くと，

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad H = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

となることを示せ．

*C.2 調和振動子の規格化された基底状態が $(m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp(-m\omega x^2/2\hbar)$ であることを示せ．

*C.3 フェルミオンの交換関係を用いて，状態 $b_i^\dagger|0\rangle$ は $N_i = b_i^\dagger b_i$ の固有状態で，その固有値は 1 であることを示せ．

C.4 次の 2 つの行列，

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

がフェルミオンの消滅演算子と生成演算子の交換関係を満たすことを示せ．

付録 **D**

部分子模型

D.1　核子を標的とした電子の弾性散乱

1950 年代に，静止した核子に電子を衝突させる弾性散乱の実験から，陽子や中性子の内部に電荷分布があることが分かり，核子の大きさが確定した．

質量 M，電荷 e の Dirac 粒子を標的とした高エネルギー電子の弾性散乱の微分断面積を，量子電磁力学によって計算することができる．実験室系において静止している非偏極の Dirac 粒子に電子を衝突させる際の，散乱角度 θ の微分断面積は，電子の質量をエネルギーに比べて無視できるものとし，微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ の最低次の項までを求めると，次のようになる (たとえば Gross 1993, p.294 参照).

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\left(\frac{E'}{E}\right)\left[\cos^2(\theta/2) + \frac{Q^2}{2M^2}\sin^2(\theta/2)\right] \tag{D.1}$$

$(E, \mathbf{p}) =$ [散乱前の電子のエネルギー・運動量 4 元ベクトル]

$(E', \mathbf{p}') =$ [散乱後の電子のエネルギー・運動量 4 元ベクトル]

$q^\mu = (E - E', \mathbf{p} - \mathbf{p}') =$ [エネルギー・運動量遷移]

$Q^2 = -q_\mu q^\mu = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 - (E - E')^2$

Q^2 が Lorentz 不変量であることに注意してもらいたい．与えられたエネルギーの下での弾性散乱に関しては，散乱角度 θ を決めれば，エネルギーと運

動量の保存則を通じて，他のすべての量が決まる．たとえば，

$$Q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2) \tag{D.2}$$

で，散乱後の電子のエネルギー E' は，

$$M(E - E') - 2EE' \sin^2(\theta/2) = 0 \tag{D.3}$$

という関係によって決まる (問題D.1)．

M を陽子の質量と置いても，式 (D.1) は実験データと合わないし，現実の陽子は異常な磁気能率(モーメント) $\approx 1.79(e\hbar/2M)$ を持つので，元々性質が異なっている．より一般的な非偏極の“拡がった”陽子からの弾性散乱の微分断面積は，次の形になる．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left(\frac{E'}{E}\right) \left[\left\{ f_1^2(Q^2) + \frac{Q^2}{4M^2} f_2^2(Q^2) \right\} \cos^2(\theta/2) + \frac{Q^2}{2M^2} \left\{ f_1(Q^2) + f_2(Q^2) \right\}^2 \sin^2(\theta/2) \right] \tag{D.4}$$

この式の形は基本的に，陽子がスピン $\frac{1}{2}$ を持ち，電気双極子能率を持たないという仮定から決まる．$f_1(Q^2)$ は陽子の Dirac 形状因子，$f_2(Q^2)$ は陽子の異常磁気能率に関する形状因子と呼ばれる．$Q = 0$ において $f_1(0) = 1$, $f_2(0) \approx 1.79$ である (異常磁気能率に対応)．以下に示す電気的形状因子と磁気的形状因子，

$$G_{\mathrm{E}}(Q^2) = f_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4M^2} f_2(Q^2) \tag{D.5}$$

$$G_{\mathrm{M}}(Q^2) = f_1(Q^2) + f_2(Q^2) \tag{D.6}$$

は，非相対論的極限において，陽子における電荷と磁気能率の分布の Fourier 変換と解釈できる (問題D.2)．これらを実験的に決定すると，そこから陽子の寸法が推定できる．$f_1(Q^2)$ と $f_2(Q^2)$ は両方とも Q^2 の増加に伴って急速に減少する関数である (図D.1)．中性子に関する同様の形状因子も，重水素を標的とした散乱のデータから実験的に決めることができる．その解析結果はクォーク模型と整合する．クォークは電荷を持つので，核子の電荷と磁気能率の分布はクォーク電荷とクォークの磁気能率を反映している．

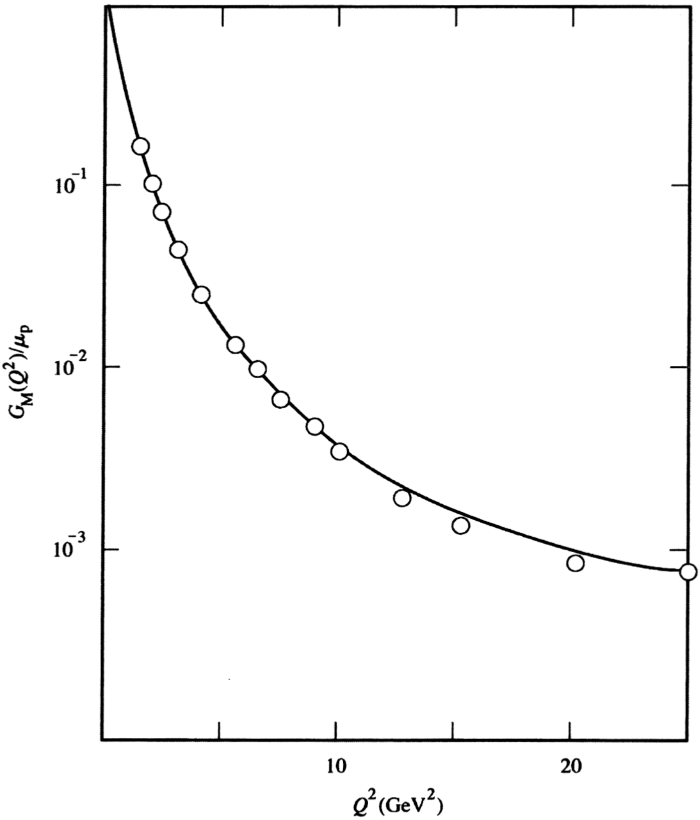


図 D.1　陽子の磁気双極子形状因子の Q^2 依存性のデータ．実線は次の単純な式，

$$G_\mathrm{M} = \mu_\mathrm{P}\left[\frac{1}{1+Q^2/\beta^2}\right]^2$$

($\mu_\mathrm{P} = 2.79$, $\beta = 0.84$ GeV) による曲線であるが，実験データとよく一致している．

$Q^2 < 3$ GeV^2 では $G_\mathrm{E}(Q^2) = G_\mathrm{M}(Q^2)/\mu_\mathrm{P}$ だが，$Q^2 > 5$ GeV^2 では $G_\mathrm{M}(Q^2)$ だけしか正確に測定できない (Coward *et al.* 1968 参照).

D.2　核子を標的とした電子の非弾性散乱：部分子模型

初期の弾性散乱の実験は，電子のエネルギーが ≤ 500 MeV の範囲で行われていた．だが，これより高いエネルギーの散乱実験が行われたことで，核子の中のクォークの挙動に光があたることになり，そこから更に高エネルギー

の素粒子物理の追求においても本質的に重要となる性質が示された．Q^2 が小さいところを除くと，高エネルギーにおいて支配的なモードは強粒子生成を含むような非弾性散乱である．非弾性散乱の場合 θ と E' は独立な変数となる．一般には最終的な強粒子系の状態を記述する多くの独立変数が他にも存在するが，実験的に重要となる断面積 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega$ は“包含断面積”(inclusive cross-section) であって，これは可能なすべての強粒子系の終状態を包括的に対象とした量である[§]．

Hamburg にある電子-陽子衝突型加速器 HERA では，30 GeV の電子ビームが 820 GeV の陽子ビームと正面衝突する．電子-陽子衝突に見られる多くの特徴は，Feynman が 1969 年に導入した“部分子模型”(parton model) によって記述される．

部分子模型では，ビーム中の陽子は“部分子”と呼ばれる構成粒子から成る系と見なされる．この構成粒子はクォーク，反クォークやグルーオンに相当する．クォークと反クォークは電荷を担う部分子となる．陽子のエネルギーと運動量 P^μ は，陽子が含む異なるタイプの各部分子 i へと確率分布しているものと想定される．陽子中で $xP^\mu \sim (x+\mathrm{d}x)P^\mu$ $(0<x<1)$ の範囲のエネルギーと運動量を担う部分子 i の平均個数は $p_i(x)\mathrm{d}x$ と書かれる．添字 i はすべての種類のクォーク，反クォークおよびグルーオンを指す (u，ū，d，d̄，s，s̄ など)．エネルギーと運動量を同じ変数 x でスケーリングするので，全部分子が陽子の速度を持つことになる．部分子が持つ横方向の運動量は無視する．したがって，この模型では HERA の陽子ビームの中のそれぞれの陽子は，部分子のビームから成るものと見なせる．この模型に基づく包含断面積は，陽子が静止している系を扱うことによって，もっとも容易に確認できる．この系ではエネルギーおよび運動量の割合 x の部分子が，静止質量 xM を持つ粒子のように振舞う．$Q^2 < M_\mathrm{W}^2$ の範囲において支配的になる散乱は荷電部分子，すなわちスピン $\frac{1}{2}$ のクォークか反クォークによる電磁的散乱と考えられる．有効質量 xM を持つタイプ i の部分子からの弾性散乱は，

---

§ (訳註) p.22 訳註参照．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^i}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{(xM)E}{E'} \times\delta\{(E'-E)(xM)+2EE'\sin^2(\theta/2)\}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{elastic}} \tag{D.7}$$

となる．$(\mathrm{d}\sigma^i/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{elastic}}$ は式 (D.4) の形を持つが，M が (xM) に，α^2 が $q_i^2\alpha^2$ に置き換わり，部分子（パートン）のタイプによって $q_i^2=(1/3)^2$ もしくは $(2/3)^2$ となる．式 (D.7) を E' に関して積分すると，δ 関数によって，式 (D.3) において M を (xM) に置き換えたときの散乱角度 θ のエネルギーが選び出される．($\delta(aE'-b)=(E'/b)\delta(E'-b/a)$，$a>0$ に注意せよ．) ν を，

$$\nu = E - E'$$

と定義すると，式は次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^i}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{(xM)E}{E'}\delta\{(xM)\nu - Q^2/2\}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{elastic}} \tag{D.8}$$

部分子（パートン）が非干渉的（インコヒーレント） (incoherent) に散乱に関与すると考えて，多くの衝突を平均化すると，部分子（パートン）模型による包含断面積は，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} &= \int\frac{(xM)E}{E'}\delta\{(xM)\nu - Q^2/2\}\left(\sum_i p_i(x)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{elastic}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{\nu}\frac{E}{E'}\sum_i p_i(x)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^i}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{elastic}}\end{aligned} \tag{D.9}$$

と与えられる．最後の式の x は，

$$x = Q^2/2M\nu \tag{D.10}$$

である‡．和はすべてのタイプの荷電部分子（パートン）に関して行う．最後に一般的な弾性散乱の式 (D.4) を代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{2ME^2\sin^4(\theta/2)} \times\left[\frac{M}{2\nu}F_2(x,Q^2)\cos^2(\theta/2)+F_1(x,Q^2)\sin^2(\theta/2)\right] \tag{D.11}$$

‡ (訳註) 変数 x の意味については p.217 訳註参照．

となる．ここで，

$$F_2(x,Q^2) = x\sum_i p_i(x)q_i^2\left\{\left(f_1^i\right)^2 + \frac{\nu}{2Mx}\left(f_2^i\right)^2\right\} \tag{D.12}$$

$$F_1(x,Q^2) = \frac{1}{2}\sum_i p_i(x)q_i^2\left\{\left(f_1^i\right) + \left(f_2^i\right)\right\}^2 \tag{D.13}$$

である (式 (D.10) により $Q^2/4x^2M^2 = \nu/2Mx$ の関係を用いた)．

実は，2 つの構造関数 $F_1(x,Q^2)$ と $F_2(x,Q^2)$ を含む包含断面積の式 (D.11) の形は一般的なもので，導入した模型には依存しない．

波長 $\hbar/Q$ は電子散乱の結果に反映される陽子の構造の尺度を決める．Q が小さいと $\hbar/Q$ が陽子の寸法に比べて長くなり，電子は陽子全体からに可干渉的(コヒーレント)に散乱されるものと予想される．一方 Q が大きい場合は部分子(パートン)の挙動が興味深いものになる．$Q^2 >$ 数 GeV^2 であれば，部分子(パートン)による非干渉的(インコヒーレント)な散乱が支配的になり，陽子の中のクォークと反クォークが自由な素粒子のように振舞うものと考えられる．ここでは異常磁気能率を無視できるので $f_2^i = 0$ と置くと，式 (D.12) と式 (D.13) から，

$$F_2(x,Q^2) = 2xF_1(x,Q^2) \tag{D.14}$$

という式が得られる．これは “Callen-Gross の関係” と呼ばれており，実験結果もこの関係を満足する．

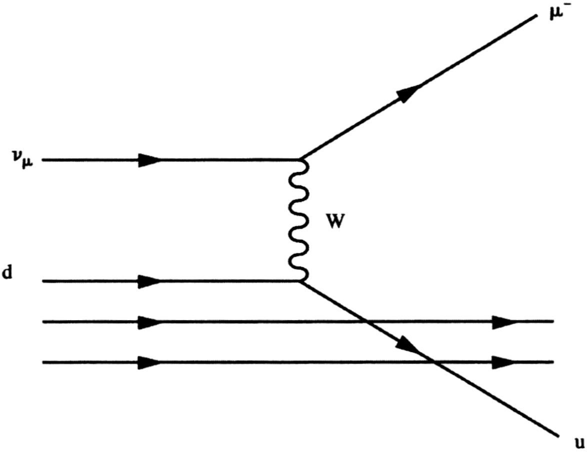
単純な部分子(パートン)模型の仮定として，Q^2 の全領域にわたって荷電部分子(パートン)が構造を持たない Dirac 粒子として振舞うものとするならば $f_1^i = 1$ であり，

$$F_2(x,Q^2) = x\sum_i p_i(x)q_i^2 = F_2(x), \tag{D.15}$$

$$F_1(x,Q^2) = \frac{1}{2}\sum_i p_i(x)q_i^2 = F_1(x) \tag{D.16}$$

のように F_2 も F_1 も無次元の変数 $x = Q^2/2M\nu$ だけに依存する．これが “Bjorken(ブヨルケン)スケーリング” である．

図 17.3 (p.218) に構造関数 $F_2(x,Q^2)$ の挙動を広範囲の Q^2 および x にわたって示してある．これを見ると単純な部分子(パートン)模型は厳密には正しくないが，陽子の弾性形状因子 (図 D.1) に比べて実際の構造関数の Q^2 依存性は弱い．通



図D.2　ミュー・ニュートリノが核子の中の d クォークによる散乱でミュー粒子に変換する過程．図では 3 つの定在的な“価クォーク”(valence quark) を描いてあるが，実際にはグルーオン場から生成されるクォーク-反クォーク対による付加的な散乱もある．

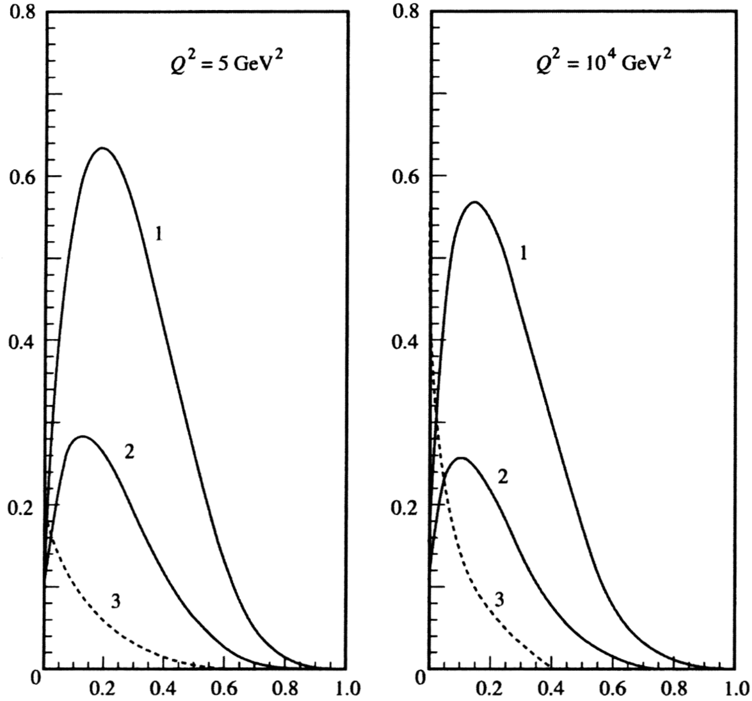
常は式 (D.12) を，

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_i p_i(x, Q^2) q_i^2 \tag{D.17}$$

のように書き直し，Q^2 依存を部分子(パートン)の形状因子ではなく，部分子(パートン)の分布自体に帰着させる．(17.3節で言及した QCD による Alterelli-Parisi の式に関する記述を参照.)

式 (D.17) によって導入されるそれぞれの部分子(パートン)の分布 $p_i(x, Q^2)$ を決めるためには，陽子の構造関数から得られる以上の情報が必要である．重陽子を標的とした散乱実験によって中性子の挙動も研究されているが，中性子と陽子のアイソスピン対称性 ($\mathrm{u} \leftrightarrow \mathrm{d}$，$\bar{\mathrm{u}} \leftrightarrow \bar{\mathrm{d}}$) により，中性子のデータはさらに独立な情報を供する[§]．クォークとレプトンの間の弱い相互作用については第 14 章で扱った．陽子と重陽子を標的としてニュートリノと反ニュートリノを散乱させるときの包含断面積 (図D.2) は，更に 4 つの独立な関係を与えるの

§ (訳註) 陽子中の分布関数 $u^{\mathrm{p}}(x)$，$d^{\mathrm{p}}(x)$ と中性子中の分布関数 $u^{\mathrm{n}}(x)$，$d^{\mathrm{n}}(x)$ が対称性により $u^{\mathrm{p}}(x) = d^{\mathrm{n}}(x)$，$d^{\mathrm{p}}(x) = u^{\mathrm{n}}(x)$ という関係を持つ．



図D.3　曲線 1 は $x\big(u(x) - \bar{u}(x)\big)$ である (式 (D.18) 参照)．$u(x) - \bar{u}(x)$ は "u-価クォーク" (valence u quark) の分布関数と呼ばれる．曲線 2 は $x\big(d(x) - \bar{d}(x)\big)$ で，$d(x) - \bar{d}(x)$ は "d-価クォーク" の分布関数である．

曲線 3 は "海クォーク" (sea quark) の分布である．$c\bar{c}$，$b\bar{b}$，$t\bar{t}$ 対の生成を無視すると，曲線 3 は $x\big(\bar{u}(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x)\big)$ である．

で，重いクォークの寄与を無視すると u，d，s，ū，d̄，s̄ それぞれの部分子（パートン）分布が推定できる．この近似の下で式 (D.17) は次のように表される．

$$F_2(x) \approx \frac{4}{9}\Big[xu(x) + x\bar{u}(x)\Big] + \frac{1}{9}\Big[xd(x) + x\bar{d}(x) + xs(x) + x\bar{s}(x)\Big] \quad \text{(D.18)}$$

上式では $u(x) = p_{\rm u}(x)$ などの表記を用いた．

図D.3 に，$Q^2 = 5$ GeV^2 と $Q^2 = 10^4$ GeV^2 で陽子中に想定される各部分子（パートン）の分布を示してある．現在のデータの精度から考えて，これらの曲線は大雑把な概形と見なければならない．これらの分布は全部分子（パートン）の電荷を合

わせて e になるように構築されている．

$$\sum_i \int_0^1 q_i p_i(x)\mathrm{d}x = 1$$

しかし荷電部分子(パートン)全体の運動量は，陽子の全運動量の約半分しかないという点が重要である．

$$\sum_i \int x p_i(x)\mathrm{d}x \approx 1/2$$

残りの運動量は，電気的に中性なグルーオンによるものと想定される．

D.3　強粒子状態

単純な部分子(パートン)模型の前提となる基本的な考え方は，Q^2 が大きければ，電子は自由なクォークもしくは反クォークによって散乱され，散乱過程が終わるまでに反跳するクォークが周囲のクォーク，反クォークやグルーオンと相互作用をするだけの時間を持たない，というものである．したがって包含断面積の計算において，最終的な強粒子状態の情報は不要である．

この模型では Q^2 が大きいときに，入射した電子と衝突を受けたクォークが両方とも大きな角度で散乱される．図1.10 (p.22) に加速器HERA で ZEUS 測定器が捉えた事象の一例を示してある．散乱された電子の横方向運動量は，反跳したクォークから生じた強粒子噴射(ハドロン・ジェット)の横方向運動量と釣り合っている．“陽子の残骸”から生じたもう一方の噴射(ジェット)の方向は，陽子ビームの方向に対して小さな角度をなす領域に制約されている．このような散乱事象の観測結果は，部分子(パートン)模型を強く支持している．

“深非弾性散乱”のデータを部分子(パートン)模型によって解釈すると，核子は反クォーク $\bar{\mathrm{u}}$，$\bar{\mathrm{d}}$ や，$\mathrm{s}\bar{\mathrm{s}}$ といったクォーク-反クォーク対も含んでいなければならない (図D.3)．このことは第 1 章で用いた静的な核子に対する単純なクォーク模型とどのように関係づければよいのだろうか？　核子に対する“3クォーク模型”のクォークは，よく“組成クォーク”(constituent quark) と呼ばれるが，これは基本的なクォークが強い相互作用場の衣をまとっており，その衣もクォーク-反クォーク対のゆらぎを生じているようなものの総体と見なされ

る．部分子（パートン）模型のクォークは，より基本的なクォークに対応している．

場の量子論において，核子のように複雑に相互作用をしている系の内部波動関数の Lorentz 変換の問題は一般に簡単ではない．陽子の中のクォークやグルーオンの挙動は，それを観測する座標系にも依存する．核子が大きい運動量を持つような慣性系を観測者の座標系として選ぶと，相対論的な時間遅延の効果によって核子内部の力学的な時間尺度が長くなるので，電子が深非弾性散乱を起こす間，部分子（パートン）の分布を固定して考えることができる．この模型における部分子（パートン）の分布は，核子が“無限大の運動量”を持つ座標系における分布を表しているものと考えられる．

練習問題　(* 解法とヒント p.306)

*D.1　式 (D.2) と式 (D.3) を証明せよ．

D.2　量子力学では，エネルギー $E \gg m_{\mathrm{e}}$ を持つ電子の，固定された静電ポテンシャル $\phi(r)$ による弾性散乱の微分断面積が Born 近似によって与えられる．電子のスピンを無視すると，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 \left(e\int \phi(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{x}\right)^2$$

である．$\mathbf{q}$ は電子の初期状態と終状態における波数の差である．

(a)　$q = |\mathbf{q}| = 2E\sin(\theta/2)$ を示せ．θ は散乱角である．

(b)　ポテンシャル $\phi(r)$ と電荷密度 $\rho(r)$ は Poisson（ポワソン）方程式 $\nabla^2\phi = -\rho$ によって関係づけられる．$\nabla^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = -q^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ となることに留意して，部分積分を用いて次式を証明せよ．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{q^4}\left(e\int \rho(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{x}\right)^2$$

この単純な例から分かるように，微分断面積を測定することによって，電荷分布の Fourier 変換を推定できる．

*D.3　E' と θ の代わりに Q^2 と ν を独立な変数として扱い，次式を示せ．

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}(\cos\theta)} = \frac{EE'}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu}$$

参考文献

[1] Alterelli, G. and Parisi, G. (1977). *Nucl. Phys.* **B126**, 298.
[2] Anderson, P. W. (1963). *Phys. Rev.* **130**, 439.
[3] Armstrong, T. A., Hogg, W. R., Lewis, G. M. *et al.* (1972). *Phys. Rev.* **D5**, 1640; *Nucl. Phys.* **B41**, 445.
[4] Bali, G. S. and Schilling, K. (1993). *Phys. Rev.* **D47**, 661.
[5] Bartelt, J., Csorna, S. E., Egyed, Z. *et al.* (1993). *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4111.
[6] Benvenuti, A. C., Bollini, D., Bruni, G. *et al.* (1989). *Phys. Lett.* **B223**, 490.
[7] Booth, S. P., Henty, D. S., Hulsebos, A., Irving, A. C., Michael, C. and Stephenson, P. W. (1992). *Phys. Lett.* **B294**, 385.
[8] CHARM II Collaboration (1994). *Phys. Lett.* **B335**, 246.
[9] Cheng, T. P. and Li, L. F. (1984). *Gauge Theory of Elementary Particle Physics.* Oxford: Clarendon Press.
[10] Close, F. (1979). *An Introduction to Quarks and Partons.* New York: Academic Press.
[11] Coward, D. H., DeStaebler, H., Early, R. A. *et al.* (1968). *Phys. Rev. Lett.* **20**, 292.
[12] Dashen, R. and Gross, D. J. (1981). *Phys. Rev.* **D23**, 2340.
[13] Donoghue, J. F., Golowich, E. and Holstein, B. R. (1992). *Dynamics of the Standard Model.* Cambridge: Cambridge University Press.
[14] Dydak, F. (1990). In *Proceeding of the 1989 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies,* ed. M. Riordan, p.249. Singapore: World Scientific.
[15] Eichten, E., Gottfreid, K., Kinoshita, T., Lane, K. D. and Yan, T. M. (1980). *Phys. Rev.* **D21**, 203.
[16] Fero, M. J. (1994). In *Proceedings of the XXVII International Conference on High Energy Physics,* eds. B. J. Bussey and I. G. Knowles, p.399. Bristol: Institute of Physics Publishing.
[17] Gross, D. J. and Wilczek, F. (1973). *Phys. Rev.* **D8**, 3633.
[18] Gross, F. (1993). *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory.* New York: Wiley.

[19] Hansen, J. R. (1991). In *Proceedings of the 25th International Conference on High Energy Physics,* eds. K. K. Phua and Y. Yamaguchi, p.343. Singapore: World Scientific.
[20] Hasenfratz, A. and Hasenfratz, P. (1985). *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35**, 559.
[21] Higgs, P. W. (1964). *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508.
[22] Hofstadter, R., Bumillar, F. and Yearian, M. R. (1958). *Rev. Mod. Phys.* **30**, 482.
[23] Itzykson, C. and Zuber, J. B. (1980). *Quantum Field Theory.* New York: McGraw-Hill.
[24] Jarlskog, C. (1985). *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039.
[25] Kinoshita, T. and Lindquist, W. B. (1990). *Phys. Rev.* **42**, 636.
[26] Kobayashi, M. and Maskawa, T. (1973). *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652.
[27] Koks, F. W. J. and Van Klinken, J. (1976). *Nucl. Phys.* **A272**, 61.
[28] Leader, E. and Predazzi, E. (1982). *Gauge Theories and the New Physics.* Cambridge: Cambridge University Press.
[29] Mori, T. (1991). In *Proceedings of 25th International Conference on High Energy Physics*, eds. K. K. Phua and Y. Yamaguchi, p.360. Singapore: World Scientific.
[30] Okun, L. B. (1982). *Leptons and Quarks.* Amsterdam: North-Holland.
[31] Olive, D. I. (1997). In *Electron*, ed. M. Springford. p.39. Cambridge: Cambridge University Press.
[32] Particle Data Group (1996). *Phys. Rev.* **D54**, 1.
(訳註：http://pdg.lbl.gov/から最近のデータを得ることができる．)
[33] Perkins, D. H. (1987). *Introduction to High Energy Physics*, 3rd edn. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
[34] Politzer, H. D. (1973). *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346.
[35] Prescott, C. Y. (1996). In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds. Z. P. Zheng and H. S. Chen, p.130. Singapore: World Scientific.
[36] Renton, P. B. (1996). In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds. Z. P. Zheng and H. S. Chen, p.35. Singapore: World Scientific.
[37] Salam, A. (1968). In *Elementary Particle Theory* (Nobel Symp. No.8), ed. N. Svartholm. Stockholm: Almquist & Wiksell.
[38] Skwarnicki, T. (1996). In *17th International Symposium on Lepton-Photon Interactions*, eds. Z. P. Zheng and H. S. Chen, p.238. Singapore: World Scientific.
[39] 't Hooft, G. (1976). *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8.
[40] Treiman, S. B., Jackiw, R., Zumino, B. and Witten, E. (1985). *Current Algebra and Anomalies.* Singapore: World Scientific.
[41] Van Dyck, R. S., Schwinberg, P. B. and Dehmelt, H. G. (1987). *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26.
[42] Weinberg, S. (1967). *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264.
[43] Yang, C. N. and Mills, R. L. (1954). *Phys. Rev.* **96**, 191.

練習問題の解法とヒント

第2章

2.1 $a'_\mu = a_{\mu\rho} a'^\rho = g_{\mu\rho} L^\rho{}_\lambda a^\lambda = g_{\mu\rho} L^\rho{}_\lambda g^{\lambda\nu} a_\nu$．よって $a'_\mu = L_\mu{}^\nu a_\nu$，$L_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} L^\rho{}_\lambda g^{\lambda\nu}$．例えば $L_0{}^1 = g_{00} L^0{}_1 g^{11} = -L^0{}_1$ となる．

2.2 $a'^\mu = L^\mu{}_\nu a^\nu$．左から $L_\mu{}^\rho$ を掛けると $L_\mu{}^\rho a'^\mu = L_\mu{}^\rho L^\mu{}_\nu a^\nu = a^\rho$ すなわち $a^\mu = a'^\nu L_\nu{}^\mu$ となる．同様に $a_\mu = a'_\nu = L^\nu{}_\mu$ である．

2.3 $\mathrm{d}\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu = \dfrac{\partial\phi}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\nu = \dfrac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} L^\nu{}_\mu \mathrm{d}x^\mu$．$\mathrm{d}x^\mu$ は任意なので，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu} L^\nu{}_\mu$$

となる．これは共変ベクトル場の変換である (問題2.2)．

2.4 $\det(L_\mu{}^\nu) = \det(g_{\mu\rho})\det(L^\rho{}_\lambda)\det(g^{\lambda\nu}) = (-1)^2\det(L^\rho{}_\lambda)$．式 (2.14) により $\det(L_\mu{}^\nu)\det(L^\mu{}_\rho) = \det(\delta^\nu_\rho) = 1$ なので，結果が得られる．

2.6 $\det\mathbf{L}_1 = 1$ かつ $\det\mathbf{L}_2 = 1$ であれば $\det\mathbf{L}_1\det\mathbf{L}_2 = 1$ となることに注意せよ．

2.7 問題2.2 の結果を用いて $\delta'^\mu_\nu = L^\mu{}_\rho L_\nu{}^\lambda \delta^\rho_\lambda = L^\mu{}_\rho L_\nu{}^\rho = \delta^\mu_\nu$ となる．

2.8 式 (2.3) を用いて，

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega\cosh\theta - k\sinh\theta \\ &= \omega(\cosh\theta - \sinh\theta) \qquad (\omega = k \text{ なので}) \\ &= \mathrm{e}^{-\theta}\omega\end{aligned}$$

となる．$v/c = \tanh\theta$ なので，結果が得られる．

2.9 Jacobi（ヤコビ）行列式は $\det(\partial x'^\mu/\partial x^\nu) = \det(L^\mu{}_\nu) = 1$ である．

2.10 空間反転操作は $x'_\mu = P^\nu_\mu x_\nu$ と書かれる．テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ は次のように変換する．

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{\mu\nu\lambda\rho} &= P^\alpha_\mu P^\beta_\nu P^\gamma_\lambda P^\delta_\rho \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\det\mathbf{P} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\end{aligned}$$

第3章

3.1 x_i $(i = 1, \ldots, 3N)$ を各粒子のDescartes（デカルト）座標とする．$x_i = x_i(q)$ なので $\dot{x}_i = (\partial x_i/\partial q_j)\dot{q}_j$ である．したがって $T = (m/2)\dot{x}_i\dot{x}_i = (m/2)(\partial x_i/\partial q_j)$ $(\partial x_i/\partial q_k)\dot{q}_j\dot{q}_k$ である．

3.2 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\int\left[\dot{\phi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\ddot{\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\ddot{\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\dot{\phi}'\right]\mathrm{d}x.$

$-(\partial\mathcal{L}/\partial\phi')(\partial\dot{\phi}/\partial x)$ の項に部分積分を施し，式 (3.12) を用いる．

3.4 直交性と分散関係 (3.20) を用いる．H と P^i を組み合わせると反変 4 元ベクトル $(H, \mathbf{P})$ になることに注意せよ．

3.5 ψ^* の変分をとると，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\delta\mathcal{L}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\\ &= \int\left[-\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\delta\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial(\delta\psi^*)}{\partial t}\psi\right) - \frac{1}{2m}\nabla(\delta\psi^*)\cdot\nabla\psi - \delta\psi^* V\psi\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}\end{aligned}$$

である．$\partial(\delta\psi^*)/\partial t$ と $\nabla(\delta\psi^*)$ を含む項の部分積分によって，

$$\delta S = \int\left[-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi - V\psi\right]\delta\psi^*\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

となる．これは任意の $\delta\psi^*$ に関してゼロになるべき量なので，括弧の中はゼロでなければならない．

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

第4章

4.1 $\mathcal{L} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$．式 (4.6) により $F^{01} = -E_x = -F_{01}$，$F^{12} = -B_2 = F_{12}$，etc.

4.2 $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\chi$．要請条件は $\nabla\cdot\mathbf{A}' = \nabla\cdot(\mathbf{A} - \nabla\chi) = f - \nabla^2\chi = 0$ である．解は次の通り．

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

4.3 $\begin{aligned}\tilde{F}_{01} &= (\varepsilon_{0123}F^{23} + \varepsilon_{0132}F^{32})/2 = (F^{23} - F^{32})/2\\ &= (-B_x - B_x)/2 = -B_x,\ \text{etc.}\end{aligned}$

4.4 $\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + (\boldsymbol{\varepsilon}_x - \mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\left[2\cos(kz-\omega t),\ -2\sin(kz-\omega t),\ 0\right]\end{aligned}$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sqrt{\frac{2\omega}{V}}\left[\sin(\omega t - kz),\ -\cos(\omega t - kz),\ 0\right]$$

上式を考察すると，任意に決めた一定の z 値の平面において，$\mathbf{E}$ は z 軸に関して正の方向に回転する．

4.5 場が無限遠で消失するならば，$\partial_i(A_0 F^{0i}) = \partial_\mu(A_0 F^{0\mu})$ はエネルギーに寄与しない．したがってエネルギー密度は一意的ではなく，次のように置くことができる．

$$T^0_0 = -F^{0\mu}\partial_0 A_\mu + \partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= -F^{0\mu}(\partial_0 A_\mu - \delta_\mu A_0) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

式 (4.8) により，自由空間では $\partial_\mu F^{0\mu} = 0$ なので，

$$= -F^{0\mu}F_{0\mu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

4.6 $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}$ で，$p^i = (\partial L/\partial \dot{x}^i) = m\dot{x}^i + qA^i$ が一般化運動量となる．運動方程式 $(dp^i/\partial t) = (\partial L/\partial x^i)$ は，

$$m\ddot{x}^i + q(\partial A^i/\partial t) + q(\partial A^i/\partial x^j)\dot{x}^j = -q(\partial\phi/\partial x^i) + q\dot{x}^j(\partial A^j/\partial x^i)$$

であるが，これは次のようになる．

$$m\ddot{x}^i = q\left[-(\partial\phi/\partial x^i) - q(\partial A^i/\partial t)\right] - qF^{ij}\dot{x}^j$$

$(\partial^i = -\partial/\partial x^i$ と式 (4.6) の定義に注意すること．）$i = 1$ と置くと，

$$m\ddot{x} = q(E_x - F^{12}\dot{y} - F^{13}\dot{z})$$

$$= q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y)$$

となる．同様に他の成分の方程式も求まる．

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p^i\dot{x}^i - L$$

$$= \mathbf{p}\cdot(\mathbf{p} - q\mathbf{A})/m - \left[(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m - q\phi + q(\mathbf{p} - q\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}/m\right]$$

$$= (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m + q\phi$$

4.7 $\int L\mathrm{d}t = \int(\gamma L)\mathrm{d}\tau$ で，$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ は Lorentz不変である (式 (12.5) 参照．τ は“固有時間”(proper time) である)．よって結果が得られる．

第5章

5.3 式 (5.19) と式 (5.20) の変換の下で，次のようになる．

$$\psi_{\rm R}'^{\dagger}\psi_{\rm L}' = \psi_{\rm R}^{\dagger}\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{M}\psi_{\rm L} = \psi_{\rm R}^{\dagger}\psi_{\rm L}$$
$$\psi_{\rm L}'^{\dagger}\psi_{\rm R}' = \psi_{\rm L}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{N}\psi_{\rm R} = \psi_{\rm L}^{\dagger}\psi_{\rm R}$$
$$\psi_{\rm R}'^{\dagger}\sigma^{\mu}\psi_{\rm R}' = \psi_{\rm R}^{\dagger}\mathbf{N}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{N}\psi_{\rm R} = L^{\mu}{}_{\nu}\psi_{\rm R}\sigma^{\nu}\psi_{\rm R}$$
$$\psi_{\rm L}'\tilde{\sigma}^{\mu}\psi_{\rm L}' = \psi_{\rm L}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{M}\psi_{\rm L} = L^{\mu}{}_{\nu}\psi_{\rm L}^{\dagger}\sigma^{\nu}\psi_{\rm L}$$
$$\begin{aligned}\psi_{\rm R}'\sigma^{\mu}\tilde{\sigma}^{\nu}\psi_{\rm L}' &= \psi_{\rm R}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{M}\mathbf{N}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}\mathbf{N}\psi_{\rm L} \quad (\mathbf{M}\mathbf{N}^{\dagger} = \mathbf{I}\ \text{なので})\\ &= L^{\mu}{}_{\lambda}L^{\mu}{}_{\rho}\psi_{\rm R}^{\dagger}\sigma^{\lambda}\tilde{\sigma}^{\rho}\psi_{\rm L}, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

5.4 式 (5.28) を用いると，式 (5.31) は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\psi^{\dagger}\beta(\mathrm{i}\beta\partial_0 + \mathrm{i}\beta\alpha_i\partial_i - m)\psi\\ &\quad = \psi^{\dagger}(\mathrm{i}\partial_0 + \mathrm{i}\alpha_i\partial_i - \beta m)\psi \quad (\beta^2 = \mathbf{I}\ \text{なので})\end{aligned}$$

5.6
$$\begin{aligned}\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^5\psi &= \mathrm{i}(\psi_{\rm L}^{\dagger}, \psi_{\rm R}^{\dagger})\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma^0\\ \sigma^0 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sigma^0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \sigma^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{\rm L}\\ \psi_{\rm R}\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{i}(\psi_{\rm L}^{\dagger}\psi_{\rm R} - \psi_{\rm R}^{\dagger}\psi_{\rm L})\end{aligned}$$

これは固有Lorentz変換の下で不変であるが，パリティ変換 (5.27) の下では符号を変える．

5.7 定義式 (5.30) と (5.4) から結果が得られる．

第6章

6.1
$$\begin{aligned}\psi_{+}^{\dagger}\psi_{+} &= \frac{1}{2}\left(\langle +|\mathrm{e}^{-\theta/2},\ \langle +|\mathrm{e}^{\theta/2}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle\\ \mathrm{e}^{\theta/2}|+\rangle\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\theta}\langle +|+\rangle + \mathrm{e}^{\theta}\langle +|+\rangle\right]\\ &= \cosh\theta = \gamma = E/m\end{aligned}$$

式 (6.14) より，右手型モードの確率は，次のように与えられる．

$$\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{2\cosh\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \left(\tanh\theta = \frac{v}{c}\ \text{なので}\right)$$

6.3
$$u_{+}^{\dagger}(\mathbf{p})u_{+}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}) = \cosh\theta = E/m, \quad \text{etc.}$$
$$u_{+}^{\dagger}(\mathbf{p})u_{-}(\mathbf{p}) = 0 \quad (\langle +|-\rangle = 0\ \text{なので})$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}|+\rangle = |+\rangle \quad \text{および} \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}|-\rangle = -|-\rangle$$

という関係は，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\hat{\mathbf{p}})|+\rangle = -|+\rangle \quad \text{および} \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot(-\hat{\mathbf{p}})|-\rangle = |-\rangle$$

を意味することに注意せよ．

6.5 式 (6.24) において $u_{+\mathrm{L}} = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle$，$u_{-\mathrm{L}} = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{\theta/2}|-\rangle$ である．$m \to 0$ で $\theta \to \infty$，$\cosh\theta \to \mathrm{e}^{\theta}/2$ とすると，

$$\sqrt{\frac{m}{E}} = \sqrt{\frac{1}{\cosh\theta}} \to \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta/2}$$

となり，展開式において $u_{-\mathrm{L}}(\mathbf{p})|-\rangle$ の項だけが残る．$v_{+\mathrm{L}}$ および $v_{-\mathrm{L}}$ の項についても同様に考えればよい．

6.6 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は規格化されており，直接に代入計算して三角関数の公式を用いると $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}|+\rangle = |+\rangle$，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}|-\rangle = -|-\rangle$ となる．

第 7 章

7.1 平面波の直交性と問題6.3 で導いた関係から，この結果が得られる．

7.2 たとえば，

$$\psi_+^C = -\mathrm{i}\gamma^2\psi_+^* = \left(\mathrm{i}/\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(pz-Et)}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle \\ \mathrm{e}^{\theta/2}|+\rangle \end{pmatrix}$$

で，$\sigma^2|+\rangle = \mathrm{i}|-\rangle$ なので，次式が得られる．

$$\psi_+^C = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(pz-Et)}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2}|-\rangle \\ -\mathrm{e}^{-\theta/2}|-\rangle \end{pmatrix}$$

7.3 式 (5.26) と式 (5.27) により，パリティ変換の下で，

$$\psi_\mathrm{L} \to \psi_\mathrm{R}, \quad \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu \to \sigma^\mu\partial_\mu$$

荷電共役変換の下では，

$$\psi_\mathrm{R} \to \mathrm{i}\sigma^2\psi_\mathrm{L}^*$$

である．したがって，これらを組み合わせた操作の下では，

$$\mathrm{i}\psi_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_\mathrm{L} \to \mathrm{i}\psi_\mathrm{L}^\mathrm{T}\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2\partial_\mu\psi_\mathrm{L}^* = -\mathrm{i}\partial_\mu\psi_\mathrm{L}^\dagger(\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2)^\mathrm{T}\psi_\mathrm{L}$$

となる (スピノル場の順序を入れ替える際に忘れずに負号を導入すること)．ここで $(\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2)^\mathrm{T} = \tilde{\sigma}^\mu$ である．

最後に作用の式において部分積分を施すと，ラグランジアン密度 $\mathrm{i}\psi_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_\mathrm{L}$ が得られる．

7.4 式 (5.20) により $\psi_\mathrm{R} \to \psi'_\mathrm{R} = \mathbf{N}\psi_\mathrm{R}$．

$$\mathrm{i}\sigma^2\psi_\mathrm{R}^* \to \mathrm{i}\sigma^2\mathbf{N}^*\psi_\mathrm{R}^*$$

ここで $\sigma^2\mathbf{N}^* = \mathbf{M}\sigma^2$ である．この関係は式 (5.24) で与えられる $\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$ に関して一般に成立する．

7.5 作用において Φ^* の変分をとり，部分積分を施すと，

$$\delta S = \int\Big\{-\big[(\mathrm{i}\partial_\mu + qA_\mu)\delta\Phi^*\big]\big[(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu)\Phi\big] - m^2\delta\Phi^*\Phi\Big\}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$
$$= \int\delta\Phi^*\Big\{(\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu)(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu)\Phi - m^2\Phi\Big\}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

となる．任意の $\delta\Phi^*$ に関して上式が成立するので Klein-Gordon 方程式が得られる．

7.6 小さな $\alpha = \alpha(x)$ を用いた変換 $\Phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Phi$ を行い，部分積分を施すと，

$$(\mathrm{i}\partial_\mu + qA_\mu)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{i}\partial_\mu + qA_\mu)\Phi - (\partial_\mu\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Phi$$

$$\delta S = \int\Big\{-(\partial_\mu\alpha)\Phi^*\big[(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu)\Phi\big] + \big[(\mathrm{i}\partial^\mu + qA^\mu)\Phi^*\big](\partial_\mu\alpha)\Phi\Big\}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$
$$= \int\alpha(x)\partial_\mu\Big\{\Phi^*\big[(\mathrm{i}\partial^\mu - qA^\mu)\Phi\big] - \big[(\mathrm{i}\partial^\mu + qA^\mu)\Phi^*\big]\Phi\Big\}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

となる．したがって次のカレント，

$$j^\mu = \mathrm{i}\big[\Phi^*(\partial^\mu\Phi) - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi\big] - 2qA^\mu\Phi^*\Phi$$

は保存し，qj^μ も保存する．($qj^\mu = -\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu$ が電磁カレントであることに注意せよ．)

7.7 直接の計算によって証明せよ．たとえばヘリシティを正，$\mu = 3$ と置くと，次のようになる．

$$qj^3 = -e\psi^+\gamma^0\gamma^3\psi$$
$$= -(e/2)\big(\mathrm{e}^{-\theta/2}\langle +|,\ \mathrm{e}^{\theta/2}\langle +|\big)\begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle \\ \mathrm{e}^{\theta/2}|+\rangle \end{pmatrix}$$
$$= -e\sinh\theta \quad (\sigma^3|+\rangle = |+\rangle \text{ なので})$$

7.8 電場線の向きが $\mathbf{E} \to \mathbf{E}' = -\mathbf{E}$ のように反転するので，この結果が得られる．

7.9 $\rho(t) \to \rho'(t') = \rho(-t)$ と仮定すると，Maxwellの方程式は $\mathbf{E} \to \mathbf{E}' = \mathbf{E}$，$\mathbf{B} \to \mathbf{B}' = -\mathbf{B}$，$\mathbf{J} \to \mathbf{J}' = -\mathbf{J}$ ならば同じ形を保つ．この条件は等価的に，

$$\phi \to \phi' = \phi, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = -\mathbf{A}$$

と書くこともできる．式 (7.6) の複素共役を取り，左から $\gamma^1\gamma^3$ を掛けると，

$$\gamma^1\gamma^3\big[\gamma^{\mu *}(-\mathrm{i}\partial_\mu - qA_\mu) - m\big]\psi^* = 0$$

であるが，ここで，

$$\gamma^1\gamma^3(\gamma^0)^* = \gamma^1\gamma^3\gamma^0 = \gamma^0\gamma^1\gamma^3$$
$$\gamma^1\gamma^3(\gamma^i)^* = -\gamma^i\gamma^1\gamma^3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

により結果が得られる．

第8章

8.3 仮に $\mathrm{e^+e^-}$ 対が生成されたとすると，対の全運動量がゼロと観測される慣性系(重心系)が存在する．この座標系では，崩壊前の光子の運動量はゼロ，すなわちエネルギーもゼロでなければならない．したがってこのような過程は，エネルギー保存則を破ることになる．

第9章

9.1 エネルギー保存の要請により $m_\pi = E_\mathrm{e} + E_\nu$ である．運動量保存により $p_\mathrm{e} = p_\nu$ である．また，

$$E_\nu = p_\nu, \quad E_\mathrm{e}^2 = p_\mathrm{e}^2 + m_\mathrm{e}^2, \quad v_\mathrm{e} = p_\mathrm{e}/E_\mathrm{e}$$

なので，

$$(m_\pi - p_\mathrm{e})^2 = E_\mathrm{e}^2 = p_\mathrm{e}^2 + m_\mathrm{e}^2, \quad p_\mathrm{e} = \frac{m_\pi^2 - m_\mathrm{e}^2}{2m_\pi}$$

となる．したがって次の結果が得られる．

$$E_\mathrm{e} = m_\pi - p_\mathrm{e} = \frac{m_\pi^2 + m_\mathrm{e}^2}{2m_\pi}$$
$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_\pi^2 - m_\mathrm{e}^2}{m_\pi^2 + m_\mathrm{e}^2}\right) = \frac{m_\mathrm{e}^2}{m_\pi^2 + m_\mathrm{e}^2}$$

9.2 終状態のエネルギーは $E = E_\mathrm{e} + E_\nu = E_\mathrm{e} + p_\mathrm{e}$ なので，次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{e}}{\mathrm{d}p_\mathrm{e}} + 1 = \frac{p_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}} + 1 = \frac{E_\mathrm{e} + p_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}} = \frac{m_\pi}{E_\mathrm{e}}$$

9.3 問題9.1の結果を用いて，

$$\left(1 - \frac{v_\mathrm{e}}{c}\right)p_\mathrm{e}^2 E_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{e}^2}{4m_\pi^3}\left(m_\pi^2 - m_\mathrm{e}^2\right)^2$$

という式が得られる．ミュー粒子に関しても同様の式が得られる．

9.4 崩壊前の π 中間子が静止しているものとすると，$\partial\Phi/\partial t$ の項だけが寄与を持

つ．式 (3.35) により，$\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中で，ここから生じる因子は，

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{(-\mathrm{i}m_\pi)}{\sqrt{2m_\pi}}a_0$$

である．また問題6.5 (p.87) の結果から，$\bar{\nu}$ の因子は，

$$\frac{1}{\sqrt{V}}d^\dagger_{\mathbf{p}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r})}|-\rangle_{\mathbf{p}'}$$

式 (6.24) により，$\mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{L}}$ の因子は，

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{e}}{E_\mathbf{p}}}b^\dagger_\mathbf{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\theta/2}\langle+|_\mathbf{p}$$

となる (このヘリシティ項だけが寄与を持つ).

体積に関する積分から $\mathbf{p}'=-\mathbf{p}$ の制約と体積因子 V が生じ，与えられた $\mathbf{p}$ に関する行列要素は，

$$\langle \mathrm{e}_\mathbf{p},\bar{\nu}_{-\mathbf{p}}|V(0)|\pi^-\rangle=\frac{(-\mathrm{i})}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m_\pi}{2}}\sqrt{\frac{m_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}}}\frac{\alpha_\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\theta/2}$$

となる ($|-\rangle_{-\mathbf{p}}=|+\rangle_\mathbf{p}$ という関係に注意).

これで遷移頻度が得られる．状態密度の中の因子 4π は，全方向の $\mathbf{p}$ に関する和から生じている．また $(E_\mathrm{e}/m_\mathrm{e})=\cosh\theta$，$\mathrm{e}^{-\theta}/\cosh\theta=(1-\tanh\theta)=(1-v/c)$ である．

9.7 $G_\mathrm{F}\approx\left(\dfrac{192\pi^3}{\tau m_\mu^5}\right)^{1/2}=1.164\times10^{-5}\ (\mathrm{GeV})^{-2}$

9.8 重心系エネルギーの自乗，

$$s=(E_\mathrm{e}+E_\nu)^2-(\mathbf{p}_\mathrm{e}+\mathbf{p}_\nu)^2$$

は Lorentz 不変量である．電子が静止している座標系において，次の式が得られる．

$$s=(m_\mathrm{e}+E_\nu)^2-p_\nu^2=m_\mathrm{e}^2+2m_\mathrm{e}E_\nu$$

9.9 式 (9.8) は，次の項を含む．

$$-2\sqrt{2}G_\mathrm{F}g_{\mu\nu}\,\mathrm{e}^\dagger_\mathrm{L}\tilde{\sigma}^\mu\nu_{\mathrm{eL}}\nu^\dagger_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^\nu\,\mathrm{e}_\mathrm{L}$$

式 (9.15) は，次の項を含む．

$$(G_\mathrm{F}/\sqrt{2})g_{\mu\nu}\nu^\dagger_{\mu\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu\nu_{\mu\mathrm{L}}\bar{\psi}_\mathrm{e}\gamma^\nu(c_\mathrm{V}-c_\mathrm{A}\gamma^5)\psi_\mathrm{e}$$

9.10 $\dfrac{\tau(\mathrm{K}\to\mu\bar{\nu}_\mu)}{\tau(\mathrm{K}\to\mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e})}=\dfrac{m_\mathrm{e}^2(m_\mathrm{K}^2-m_\mathrm{e}^2)^2}{m_\mu^2(m_\mathrm{K}^2-m_\mu^2)^2}=2.57\times10^{-5}$

$$\frac{1}{\tau(\mathrm{K}\to\mu\bar{\nu}_\mu)}=\frac{\alpha_\mathrm{K}^2}{4\pi}\left(1-\frac{v_\mu}{c}\right)p_\mu^2E_\mu\quad(\text{式 (9.3) 参照})$$

ここで,

$$\left(1-\frac{v_\mu}{c}\right)p_\mu^2 E_\mu = \frac{m_\mu^2}{4m_{\rm K}^3}\left(m_{\rm K}^2 - m_\mu^2\right)^2$$

である (問題9.3 参照).

ここから $\alpha_{\rm K} = 5.82\times 10^{-10}\ {\rm MeV}^{-1}$ と与えられ, $\alpha_\pi = 2.09\times 10^{-9}$ なので (p.124) $\alpha_{\rm K}/\alpha_\pi = 0.28$ となる.

9.11 崩壊 $\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau$ を考える. この崩壊を起こす $\mathcal{L}_{\rm int}$ の中の項は,

$$\nu_{\tau{\rm L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \tau_{\rm L} \partial_\mu \Phi^\dagger$$

である. タウ粒子は静止しており, スピンが z 方向を向いているものとしよう. ニュートリノの運動量を $\mathbf{p}$ と置く. そうすると π 中間子の運動量は $(-\mathbf{p})$ と表され, 相互作用エネルギーは次の項を含む.

$$\frac{\alpha_\pi}{\sqrt{V}}\frac{\rm i}{\sqrt{2E_\pi}} a_\pi^\dagger(-\mathbf{p}) b_\nu^\dagger(\mathbf{p}) b_\tau(0) \langle -|_{\mathbf{p}}(\sigma^0 E_\pi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ここで $\langle -|_{\mathbf{p}}(\sigma^0 E_\pi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) = \langle -|_{\mathbf{p}}(E_\pi + p_\nu) = \langle -|_{\mathbf{p}} m_\tau$ であり, 問題6.6 から $\langle -|_{\mathbf{p}} = (-\sin(\theta/2){\rm e}^{{\rm i}\phi},\ \cos(\theta/2))$ である. θ および ϕ は $\mathbf{p}$ の方向を表す極座標の角度である. よって,

$$\langle \pi_{-\mathbf{p}}, \nu_{\mathbf{p}}|V|\tau\rangle = -\frac{\alpha_\pi}{\sqrt{V}}\frac{\rm i}{\sqrt{2E_\pi}} m_\tau \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta/2){\rm e}^{{\rm i}\phi}$$

となる. 崩壊頻度は,

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi\int \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \rho(m_\tau){\rm d}\Omega$$

と表される. ここで,

$$\rho(m_\tau) = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{(m_\tau^2 - m_\pi^2)^2}{4m_\tau^2}\frac{E_\pi}{m_\tau}$$

であり, 角度積分から因子 2π が生じる.

第 10 章

10.1 $-(m^2/2\phi_0^2)\sqrt{2}\phi_0\chi\psi^2$ という項が χ 場と ψ 場を結合させる. $m = m_\chi/\sqrt{2}$ である. ψ 粒子が質量を持たないことから, 終状態のエネルギーは $E = 2p$ で, この崩壊の状態密度因子は,

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3}4\pi p^2\frac{{\rm d}p}{{\rm d}E}, \quad \frac{{\rm d}p}{{\rm d}E} = \frac{1}{2}$$

となる．角度積分から因子 4π が生じる．

行列要素 $\langle \mathbf{p}, -\mathbf{p}|V|\chi$の静止状態$\rangle$ において，χ 場は展開式 (3.21) から因子 $1/\sqrt{2m_\chi}$ を与え，各 ψ 場は因子 $1/\sqrt{2p}$ を与える．よって次のようになる．

$$2\pi\left|\langle \mathbf{p}|V|i\rangle\right|^2\rho(E) = 2\pi\frac{m_\chi^4}{8\phi_0^2}\frac{1}{2m_\chi}\frac{1}{4p^2}\frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{m_\chi}{128\pi}\left(\frac{m_\chi}{\phi_0}\right)^2$$

10.2 孤立したベクトルボゾンが崩壊するためには $\mathcal{L}_{\rm int}$ の中に A_μ の線形項が必要である．$\left(\sqrt{2}\phi_0 q^2\right)A_\mu A^\mu h$ という項は，エネルギー保存を満足し得るならば，すなわち $m_h = \sqrt{2}m > 2\left(\sqrt{2}q\phi_0\right)$ であれば，スカラーボゾンの崩壊を許容することになる．

第 11 章

11.1 $\mathbf{UWU}^\dagger$ は $(\mathbf{UWU}^\dagger)^\dagger = \mathbf{UWU}^\dagger$ を満たし，$\mathrm{Tr}(\mathbf{UWU}^\dagger) = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{UW}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{W}) = 0$ である．

$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 = \mathbf{I}$ と，$\alpha^j\alpha^j = 1$ なので $(\partial_\mu\alpha^j)\alpha^j = 0$ であることに注意すると，$(2\mathrm{i}/g_2)(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger$ は行列 τ^j の実数係数を持つ線形結合によって表される．各 τ^j は Hermite行列で，固有和はゼロである．

11.3 最後の項は $(g_2^2\phi_0^2/4)(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu})$ のように書くことができる．その前の項も電磁場が無い場合には同様に扱える．したがって質量 $g_2\phi_0/\sqrt{2}$ を持つ独立な 2 つの場が存在する (4.9節参照)．

11.4 相互作用ラグランジアン密度 (11.32) は $\left(g_2^2/\sqrt{2}\right)hW_\mu^- W^{+\mu}$ という項を含み，これが h 場と荷電 W 場を結合させる．

11.5 $\mathbf{U} = \cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ (式 (B.9) 参照) を考えると，

$$\mathbf{U}^* = \cos\alpha\mathbf{I} - \mathrm{i}\sin\alpha(\tau^1\hat{\alpha}^1 - \tau^2\hat{\alpha}^2 + \tau^3\hat{\alpha}^3)$$

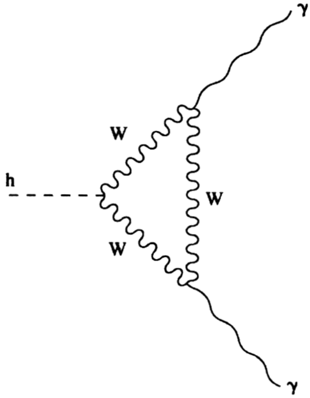
であり，$\tau^2\tau^1 = -\tau^1\tau^2$，$\tau^2\tau^3 = -\tau^3\tau^2$ の関係を用いると，

$$\tau^2\mathbf{U}^* = \left[\cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha(\tau^1\hat{\alpha}^1 + \tau^2\hat{\alpha}^2 + \tau^3\hat{\alpha}^3)\right]\tau^2$$

となる．したがって，

$$\mathrm{i}\tau^2\mathbf{U}^* = \mathbf{U}(\mathrm{i}\tau^2), \quad \mathrm{i}\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，結果が得られる．



11.4 の Feynman ダイヤグラム．

11.6 式 (B.9) を用いて，次式が得られる．

$$\mathbf{U} = \cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha(\sin\phi\tau^1 + \cos\phi\tau^2)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{i}\sin\alpha(\sin\phi - \mathrm{i}\cos\phi) \\ \mathrm{i}\sin\alpha(\sin\phi + \mathrm{i}\cos\phi) & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

第 12 章

12.2 2 つの場を，

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

のように 2 重項とする．局所的ゲージ対称性を維持するために，ラグランジアン密度の力学的な項は，

$$\mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}\big(\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}_\mu\big)\mathbf{L}$$

という形でなければならない．L_1 と L_2 を結合させる項は，たとえば，

$$-(g_2/2)L_1^\dagger\tilde{\sigma}^\mu(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2)L_2$$
$$= -(g_2/2)L_1^\dagger\tilde{\sigma}^\mu L_2 W_\mu^\dagger$$

である．演算子 $W_\mu^\dagger$ は電荷 e を消滅させるので，電荷保存のためには $L_1^\dagger\tilde{\sigma}^\mu L_2$ が電荷 e を生成しなければならない．

12.3 静止している Higgs ボゾンは，運動量も角運動量もゼロである．したがって生

成する e^+ と e^- は反対向きに同じ大きさの運動量を持つ．仮にこれらが互いに反対のヘリシティを持つとすると，角運動量保存の要請から運動方向に沿って $+1$ もしくは -1 の軌道角運動量を持たなければならない．$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=0$ なので，これは不可能である．

終状態の状態密度は，

$$\rho(E)=\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi p_{\mathrm{e}}^2\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}E}$$

と表されるが，終状態エネルギーは $E=2E_{\mathrm{e}}$ で $E_{\mathrm{e}}^2=m_{\mathrm{e}}^2+p_{\mathrm{e}}^2$ なので，次のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}E}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}E_{\mathrm{e}}}=\frac{E_{\mathrm{e}}}{2p_{\mathrm{e}}},\quad \rho(E)=\frac{V}{(2\pi)^2}p_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}$$

式 (12.9) の相互作用項は $-\left(c_{\mathrm{e}}/\sqrt{2}\right)h\bar{\psi}\psi$ である．式 (6.24) と式 (3.21) から，行列要素は，

$$\langle f|V|i\rangle=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2m_{\mathrm{H}}}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{E_{\mathrm{e}}}\left[\bar{u}_+(\mathbf{p})v_+(-\mathbf{p})\right]\quad\text{or}\quad\left[\bar{u}_-(\mathbf{p})v_-(-\mathbf{p})\right]$$

となる．ここで $\bar{u}_\pm(\mathbf{p})v_\pm(-\mathbf{p})=\sinh\theta$，$E_{\mathrm{e}}/m_{\mathrm{e}}=\cosh\theta$ である．したがって正のヘリシティへの崩壊頻度は，

$$2\pi\left|\langle f|V|i\rangle\right|^2\rho(E)=2\pi\frac{c_{\mathrm{e}}^2}{2}\frac{1}{2m_{\mathrm{H}}}\tanh^2\theta\frac{1}{(2\pi)^2}p_{\mathrm{e}}E_{\mathrm{e}}$$

と与えられる．ここで $\tanh\theta=v_{\mathrm{e}}/c=p_{\mathrm{e}}/E_{\mathrm{e}}$ で，$E_{\mathrm{e}}=m_{\mathrm{H}}/2$ である．負のヘリシティへの崩壊頻度も同じであり，結果が得られる．

12.4 $c_\tau>c_\mu>c_{\mathrm{e}}$ なので (式 (12.13) 参照)，レプトン化部分幅の中で $\tau^+\tau^-$ への崩壊が支配的になる．また Higgs ボゾンの質量はタウ粒子の質量よりも遥かに大きいので $v_\tau\approx c$ である．したがって，次の結果が得られる．

$$\frac{\Gamma}{m_{\mathrm{H}}}\approx\frac{c_\tau^2}{16\pi}=\frac{1}{16\pi}\left(\frac{m_\tau}{\phi_0}\right)^2$$

第 13 章

13.1 W ボゾンが静止している座標系を採用し，レプトンの質量を無視すると，$\mathbf{p}_{\mathrm{l}}=-\mathbf{p}_\nu$，$E_{\mathrm{l}}=p_{\mathrm{l}}=M_{\mathrm{W}}/2$，$p_{\mathrm{l}}^2=M_{\mathrm{W}}^2/4=p_x^2+p_y^2+p_z^2$ である．ビームの方向に x 軸を取ると，横方向運動量の自乗平均は次のように与えられる．

$$\overline{p_x^2}+\overline{p_y^2}=(2/3)p_{\mathrm{l}}^2=M_{\mathrm{W}}^2/6$$

13.2 式 (12.23) により Z_μ は，右手型の電子場からは結合因子 $e\tan\theta_{\mathrm{W}}=2e\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$

$/\sin(2\theta_{\rm W})$ によって生成し，左手型の電子場からは結合因子 $-e\cos(2\theta_{\rm W})/\sin(2\theta_{\rm W})$ によって生成する．高エネルギービームの正面衝突を考えると，電子 (陽電子) の右手型成分は正 (負) のヘリシティを持つ．したがって電子ビームの方向に沿った全スピンは $+1$ である．左手型成分のスピンはこれと反対になる．非偏極のビームには左手型成分と右手型成分が同じだけ含まれることから，結果が得られる．

13.3 $\rm W^-$ が静止している座標系において，崩壊 $\rm W^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ を考える．一般性を失うことなく $\rm W^-$ について $J=1$，$J_z=0$ と置くことができる (4.9節参照)．この崩壊に関わる相互作用ラグランジアン密度は (式 (12.15) と式 (12.16) から)，

$$\mathcal{L} = -\big(g_2/\sqrt{2}\big)j^3 W_3^-$$

である．電子の運動量を $\mathbf{p}$ と置くと，ニュートリノの運動量は $-\mathbf{p}$ である．電子の質量を無視すると (問題6.5 参照)，この崩壊の行列要素は，

$$\langle f|V|i\rangle = \frac{g_2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2M_{\rm W}V}}\langle -|\sigma^3|+\rangle$$

と与えられる ($\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}|-\rangle = -|-\rangle$，$\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})|+\rangle = -|+\rangle$ の関係を思い出すこと)．また問題6.6 から $\langle -|\sigma^3|+\rangle = -\sin\theta\, {\rm e}^{{\rm i}\phi}$ である．崩壊頻度は，

$$\Gamma = 2\pi\int\big|\langle f|V|i\rangle\big|^2 {\rm d}\Omega\frac{V}{(2\pi)^3}p_{\rm e}^2\frac{{\rm d}p_{\rm e}}{{\rm d}E}$$

と表されるが，ここで ${\rm d}p_{\rm e}/{\rm d}E = 1/2$，$p_{\rm e} = M_{\rm W}/2$ なので，次のようになる．

$$\Gamma = \frac{g_2^2}{48\pi}M_{\rm W} = \frac{G_{\rm F}M_{\rm W}^3}{6\pi\sqrt{2}} \quad (\text{式 (12.22) による})$$

$\rm Z \to \nu\bar{\nu}$ の崩壊頻度の計算も同様であるが，$M_{\rm W}$ が $M_{\rm Z}$ に，結合定数 $g_2/\sqrt{2}$ が $e/\sin 2\theta_{\rm W} = g_2/2\cos\theta_{\rm W} = g^2 M_{\rm Z}/2M_{\rm W}$ に置き換わる (式 (12.23)，式 (11.38)，式 (11.37a) を用いる)．そうすると，次の結果が得られる．

$$\Gamma({\rm Z}\to\nu\bar{\nu}) = \frac{G_{\rm F}M_{\rm Z}^3}{12\pi\sqrt{2}}$$

式 (12.23) には $\Gamma(\rm Z \to e^+e^-)$ に寄与する項が 2 つあり，崩壊頻度は次のように与えられる．

$$\Gamma({\rm Z}\to{\rm e^+e^-}) = \Gamma({\rm Z}\to\nu\bar{\nu})\big[(2\sin^2\theta_{\rm W})^2 + (\cos 2\theta_{\rm W})^2\big]$$

13.4 83.86 MeV

第14章

14.3 $\varepsilon_{ab}\Phi'_a L'_b = \varepsilon_{ab}U_{ac}\Phi_c U_{bd}L_d$

$$= \varepsilon_{ab}U_{ac}U_{bd}\Phi_c L_d$$

$$= \varepsilon_{cd}\Phi_c L_d \quad (\det\mathbf{U} = 1 \text{ なので})$$

14.4 式 (11.23) により,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であり，これを式 (14.6) に代入すると，結合項は次のように与えられる．

$$-\left(1/\sqrt{2}\right)\sum G^d_{ij} d^\dagger_{\mathrm{L}i} d_{\mathrm{R}j} h + [\text{Hermite共役}]$$

同様の項が式 (14.9) と式 (14.10) からも生じる．真のクォーク場の質量を用いると，これらは,

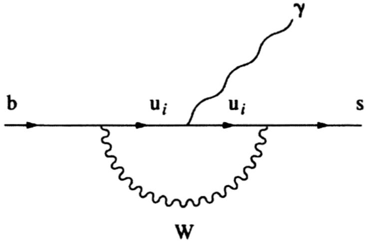
$$-\left(1/\sqrt{2}\phi_0\right)\sum\left[m^d_i(d^\dagger_{\mathrm{L}i}d_{\mathrm{R}i} + d^\dagger_{\mathrm{R}i}d_{\mathrm{L}i}) + m^u_i(u^\dagger_{\mathrm{L}i}u_{\mathrm{R}i} + u^\dagger_{\mathrm{R}i}u_{\mathrm{L}i})\right]h$$

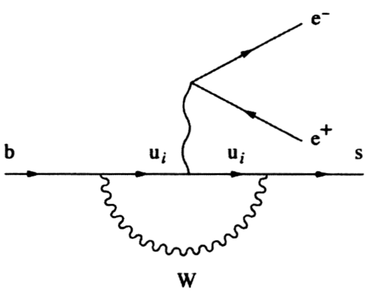
と表され，t クォークとの結合は次のように与えられる．

$$c_{\mathrm{t}} = \frac{m_{\mathrm{t}}}{\sqrt{2}\phi_0} \approx \frac{180\ \mathrm{GeV}}{\sqrt{2}\times 180\ \mathrm{GeV}} \approx 0.7$$

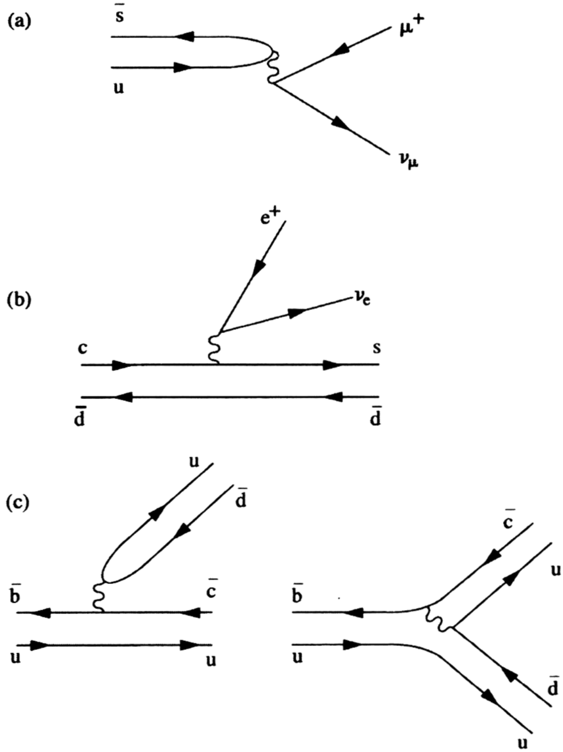
14.5 $\mathrm{K}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ の崩壊に関して，
j^μ から $s^\dagger_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu u_{\mathrm{L}} V^*_{\mathrm{us}}$，$j^{\mu\dagger}$ から $\nu^\dagger_{\mu\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu \mu_{\mathrm{L}}$
が 2 次摂動の寄与を持つ (次ページ図 (a) 参照).
$\mathrm{D}^+ \to \mathrm{K}^0 + \mathrm{e}^+ + \nu_{\mathrm{e}}$ に関しては，
j^μ から $s^\dagger_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu c_{\mathrm{L}} V^*_{\mathrm{cs}}$，$j^{\mu\dagger}$ から $\nu^\dagger_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}}$ (次ページ図 (b) 参照),
$\mathrm{B}^+ \to \bar{\mathrm{D}}^0 + \pi^+$ に関しては，
j^μ から $b^\dagger_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu c_{\mathrm{L}} V^*_{\mathrm{cb}}$，$j^{\mu\dagger}$ から $u^\dagger_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^\mu d_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{ud}}$ (次ページ図 (c) 参照),
が寄与を持つ．

14.6





u_i と書いたクォークは，u クォークもしくは t クォークとなり得る．



14.5 のダイヤグラム.

第 15 章

15.1 式 (15.3) に示した $Z \to d\bar{d}$ の崩壊頻度は，問題 13.3 の解法に示した $Z \to e^+e^-$ の崩壊頻度 (13.3) の導出方法から類推できる．ラグランジアン密度 (12.23) および (14.14) を比較すると，左手型場の結合因子は $\cos 2\theta_W = 1 - 2\sin^2\theta_W$ から $\left(1-(2/3)\sin^2\theta_W\right)$ に，右手型場の結合因子は $2\sin^2\theta_W$ から $(2/3)\sin^2\theta_W$ に置き換わっている．色の因子 3 を含めて，崩壊頻度の式 (13.3) の $\sin^2\theta_W$ を $(1/3)\sin^2\theta_W$ に置き換えると，式 (15.3) が得られる．

$Z \to u\bar{u}$ の崩壊頻度も同様である．式 (12.23) と式 (14.14) を比較すると，$\sin^2\theta_W$ が $(2/3)\sin^2\theta_W$ に置き換わっている．

$W^+ \to u_i\bar{d}_j$ の崩壊頻度 (15.6) は，問題 13.3 の解答に示した $W^+ \to e^+\nu_e$ の崩壊頻度 (13.2) の導出から類推できる．式 (12.18) と式 (14.20) の相互作用を比較すると，$g_2/\sqrt{2}$ が $eV_{ij}/\sqrt{2}\sin\theta_W = g_2V_{ij}/\sqrt{2}$ に置き換わっている．

色の因子 3 を含めると，式 (13.2) の崩壊頻度から式 (15.6) の崩壊頻度が導かれる．

第 16 章

16.1 $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu + \mathrm{i}g(\mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\mu)$

$$= (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\nu)(\lambda^a/2)$$
$$+\mathrm{i}(g/4)(G^b_\mu G^c_\nu \lambda_b \lambda_c - G^c_\nu G^b_\mu \lambda_c \lambda_b)$$

であり，

$(\lambda_b\lambda_c - \lambda_c\lambda_b) = 2\mathrm{i} f_{bca}\lambda_a$ (式 (B.27) 参照)

なので，次式が得られる．

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \left[(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - g f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu\right](\lambda_a/2)$$

16.2 これらは式 (16.9) における G 場の 2 次および 3 次の項である．

16.3 G^a_ν の変分を取ると，

$$\delta S = \int\left[-(1/2)G^{a\mu\nu}\delta G^a_{\mu\nu} - g\sum_f \bar{\mathbf{q}}_f \gamma^\nu \delta G^a_\nu (\lambda_a/2)\mathbf{q}_f\right]\mathrm{d}^4x$$

であって，

$$-(1/2)G^{a\mu\nu}\delta G^a_{\mu\nu} = -G^{a\mu\nu}\partial_\mu(\delta G^a_\nu)$$
$$+g\,G^{c\mu\nu}G^b_\mu \delta G^a_\nu f_{cba}$$

である (右辺に 2 つの等しい寄与が生じる)．

部分積分によって，

$$\delta S = \int\left[\partial_\mu G^{a\mu\nu} - g\,G^{c\mu\nu}G^b_\mu f_{abc} - g\sum_f \bar{\mathbf{q}}_f \gamma^\nu (\lambda_a/2)\mathbf{q}_f\right]\delta G^a_\nu \mathrm{d}^4x$$

となる ($f_{cba} = -f_{abc}$)．

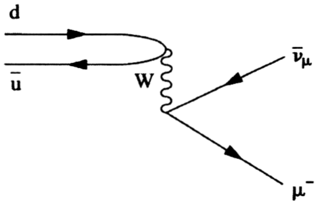
δG^a_ν は任意なので，式 (16.14) が得られる．

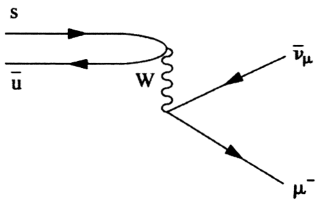
16.4 $Q^2/4m^2 = \mathrm{e}^{12\pi^2/e^2} = \mathrm{e}^{3\pi/\alpha} = 10^{560}$
$2m \sim 1$ MeV，$Q^2 \sim 10^{560}$ $(\mathrm{MeV})^2$

16.5 $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r} = Qr\cos\theta$，$\mathrm{d}^3\mathbf{Q} = Q^2\mathrm{d}Q\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\phi$ と置く．(Q,θ,ϕ) は $\mathbf{Q}$ の極座標で，$\mathbf{r}$ を $(0,0,r)$ と取る．

第 18 章

18.1





式 (14.15) から $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{dW}^+$ と $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{sW}^+$ の相互作用項は，それぞれ V_{ud} および V_{us} を含む．問題9.10 より $\alpha_{\mathrm{K}}/\alpha_\pi \approx 0.28$ である．これが $V_{\mathrm{us}}/V_{\mathrm{ud}}$ に等しいと置くと $\sin\theta_{12} \approx 0.27$ となる．

18.2 S状態を形成している 2 つの π 中間子の座標を $\mathbf{r}_1$ および $\mathbf{r}_2$ と置くと，内部波動関数は $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ だけに依存する関数であって，$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ は C および P の下で不変である．したがって，次のようになる．

$$CP|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle \quad \text{and} \quad CP|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle$$

18.3 3-π 中間子系に含まれる各中間子の座標を $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$ とすると，内部波動関数は相対座標，たとえば $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ だけに依存する．回転の下で不変 $(J = 0)$ であるためには，内部波動関数が 3 つのスカラー $\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_{12}$，$\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_{23}$，$\mathbf{r}_{23}\cdot\mathbf{r}_{23}$ だけに依存する関数でなければならない．これらは C や P の変換の下で不変である．π^0 の内部パリティは負なので，次のようになる．

$$CP|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$$

18.4 原点と $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$，$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, 0)$ を頂点とする三角形の面積は，

$$\begin{aligned}(1/2)|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| &= (1/2)\big|(x_1y_2 - x_2y_1)\big| \\ &= (1/2)\big|\mathrm{Im}(z_1^* z_2)\big|\end{aligned}$$

と与えられる．$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ である．したがってユニタリー三角形の面積は，次のようになる．

$$(1/2)\mathrm{Im}\big|(V_{\mathrm{ud}}^* V_{\mathrm{ub}} V_{\mathrm{cd}} V_{\mathrm{cb}}^*)\big| = J/2$$

18.5 すべての複素数 z_i は $z_i' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_\mathrm{d}-\theta_\mathrm{b})}z_i$ のように変換するので，三角形全体が角度 $(\theta_\mathrm{d}-\theta_\mathrm{b})$ だけ回転する．

付録 A

A.1 この式は $\alpha, \beta, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots, n$ の場合に成立する．たとえば α と β の入れ替えは，i 列と j 列の入れ替えと等価であって，同じ符号の変化を生じる．

A.3 $\mathbf{M} = (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\dagger)/2 + \mathrm{i}(\mathbf{M}-\mathbf{M}^\dagger)/2\mathrm{i}$. $(\mathbf{M}+\mathbf{M}^\dagger)/2$ も $(\mathbf{M}-\mathbf{M}^\dagger)/2\mathrm{i}$ も Hermite行列である．$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$，すなわち $\mathbf{M}$ が対角化できるのは，唯一，次の条件が満たされる場合である．

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{0},$$
$$\text{i.e.}\quad (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\dagger)(\mathbf{M}-\mathbf{M}^\dagger) - (\mathbf{M}-\mathbf{M}^\dagger)(\mathbf{M}+\mathbf{M}^\dagger) = \mathbf{0}$$

又は，

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{0}$$

(この条件は $\mathbf{M}$ がユニタリー行列ならば満たされる)．

A.4 $(\mathbf{MM}^\dagger)^\dagger = \mathbf{MM}^\dagger$ なので，$\mathbf{U}_1(\mathbf{MM}^\dagger)\mathbf{U}_1^\dagger = \mathbf{M}_\mathrm{D}^2$ となるような $\mathbf{U}_1$ を見いだすことができる．$\mathbf{M}_\mathrm{D}^2 = \mathbf{U}_1\mathbf{M}(\mathbf{U}_1\mathbf{M})^\dagger$ なので，$\mathbf{M}_\mathrm{D}^2$ の対角要素は ≥ 0 である．このようにして対角要素が実数でゼロ以上の $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ を選ぶことができる．対角要素がすべてゼロでなければ $\mathbf{M}_\mathrm{D}$ の逆行列が存在する．ここで，

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}\mathbf{U}_1 = \mathbf{H}^\dagger \quad \text{and} \quad \mathbf{V} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{M}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{VV}^\dagger &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{MM}^\dagger\mathbf{H}^{-1} \quad ((\mathbf{H}^{-1})^\dagger = \mathbf{H}^{-1}\text{なので})\\ &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}^2\mathbf{U}_1\mathbf{H}^{-1}\\ &= \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}^{-1}\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}^2\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}^{-1}\mathbf{U}_1\\ &= \mathbf{I} \quad (\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^\dagger = \mathbf{I}\text{ なので})\end{aligned}$$

となる．したがって $\mathbf{V}$ は (そして $\mathbf{U}_1\mathbf{V} = \mathbf{U}_2$ も) ユニタリー行列である．最後に，$\mathbf{M} = \mathbf{HV} = \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}\mathbf{U}_1\mathbf{V} = \mathbf{U}_1^\dagger\mathbf{M}_\mathrm{D}\mathbf{U}_2$ となる．

付録 B

B.1 $\mathbf{H}$ を対角化するユニタリー変換 $\mathbf{H} \to \mathbf{H}' = \mathbf{VHV}^\dagger = \mathbf{H}_\mathrm{D}$ は $\mathbf{U}$ の各項も対角化するので，次のようになる．

$$\mathbf{U} \to \mathbf{U}' = \mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{U}_\mathrm{D} = \exp(\mathrm{i}\mathbf{H}_\mathrm{D})$$

$$\det\mathbf{U} = \det\mathbf{U}_\mathrm{D} = \prod_n \exp\mathrm{i}(\mathbf{H}_\mathrm{D})_{nn} = \exp\left[\mathrm{i}\sum_n(\mathbf{H}_\mathrm{D})_{nn}\right] = \exp[\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\mathbf{H}_\mathrm{D}]$$

$\mathrm{Tr}\mathbf{H}_\mathrm{D} = \mathrm{Tr}\mathbf{H}$ なので，$\mathrm{Tr}\mathbf{H} = 0$ であれば $\det\mathbf{U} = 1$ となる．

B.2 $R_{01}(\theta)$ と $R_{02}(\theta)$ に対応する $SU(2)$ 行列は，それぞれ，

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \mathrm{i}\sin(\theta/2) \\ \mathrm{i}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

である．対応関係は直接確認できる．

B.3 式 (B.5) において式 (B.12) と問題B.2 の結果を用いると，$R(\psi,\theta,\phi)$ は，次の積に対応する．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} \end{pmatrix}$$

B.4 Lorentz変換の下で $\mathbf{l} \to \mathbf{l}' = \mathbf{M}\mathbf{l}$，$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{N}\mathbf{r}$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\mathbf{r} \to\ & \mathbf{l}^\dagger\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu\mathbf{N}\mathbf{r} \\
&= \mathbf{l}^\dagger\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{M}\mathbf{N}^\dagger\sigma^\nu\mathbf{N}\mathbf{r} \quad (\mathbf{M}\mathbf{N}^\dagger = \mathbf{I}\ \text{なので}) \\
&= \mathbf{l}^\dagger L^\mu{}_\lambda\tilde{\sigma}^\lambda\mathbf{L}^\nu{}_\rho\sigma^\rho\mathbf{r} \quad (\text{式 (B.17) と式 (B.18) による}) \\
&= L^\mu{}_\lambda L^\nu{}_\rho(\mathbf{l}^\dagger\tilde{\sigma}^\lambda\sigma^\rho\mathbf{r})
\end{aligned}$$

となる．次式を証明するのは容易である．

$$\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu = \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu) \\ 2 & (\mu = \nu = 0) \\ -2 & (\mu = \nu = i;\ i = 1,2,3) \end{cases}$$

B.5 式 (B.10) より，

$$\mathbf{X}(x) = x^i\sigma^i$$
$$\mathbf{X}'(x') = x'^i\sigma^i = R^i{}_j x^j\sigma^i$$

で，また $\mathbf{X}' = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}x^j\sigma^j\mathbf{U}^\dagger$ である．x^j は任意なので $\mathbf{U}\sigma^j\mathbf{U}^\dagger = R^i{}_j\sigma^i$ が成立する．左から σ^k を掛けて固有和（トレース）を取ると，

$$\mathrm{Tr}(\sigma^k\mathbf{U}\sigma^j\mathbf{U}^\dagger) = R^i{}_j\mathrm{Tr}(\sigma^k\sigma^i)$$

となる．ここで，

$$\mathrm{Tr}(\sigma^k\sigma^i) = \begin{cases} 2 & (k=i) \\ 0 & (k\neq i) \end{cases}$$

なので，結果が得られる．

B.6 式 (B.17) から $\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{M} = L^\mu{}_\lambda\tilde{\sigma}^\lambda$ である．左から $\tilde{\sigma}^\nu$ を掛けて固有和（トレース）を取り，

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu\tilde{\sigma}^\lambda) = \begin{cases} 2 & (\lambda=\nu) \\ 0 & (\lambda\neq\nu) \end{cases}$$

を適用すると，結果が得られる．

付録 C

C.2 基底状態は $a|0\rangle = 0$ または $(X+\mathrm{i}P)|0\rangle = 0$ によって規定される．Schrödinger 表示では $P = -\mathrm{id}/\mathrm{d}X$ なので $(X+\mathrm{d}/\mathrm{d}X)\psi_0 = 0$ であり，$\psi_0 = A\mathrm{e}^{-X^2/2}$ と与えられる．係数 A は規格化条件から決まる．

C.3
$$\begin{aligned} N_i b_i^\dagger|0\rangle &= b_i^\dagger b_i b_i^\dagger|0\rangle \\ &= b_i^\dagger(1-b_i^\dagger b_i)|0\rangle = b_i^\dagger|0\rangle \end{aligned}$$

付録 D

D.1
$$\begin{aligned} Q^2 &= (\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 - (E-E')^2 \\ &= (p^2-E^2) + (p'^2-E'^2) - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + 2EE' \end{aligned}$$

ここで $E^2 = p^2+m^2$，$E'^2 = p'^2+m^2$ なので，電子の質量を無視すると，

$$Q^2 = -2pp'\cos\theta + 2EE' = 2EE'(1-\cos\theta) = 4EE'\sin^2(\theta/2)$$

となる．

反跳する陽子のエネルギーと運動量は $E_\mathrm{p} = M+E-E'$，$\mathbf{P} = \mathbf{p}-\mathbf{p}'$ と与えられる．また $E_\mathrm{p}^2 = M^2+P^2$ である．よって，

$$\begin{aligned} Q^2 &= p^2 - (E-E')^2 \\ &= (M+E-E')^2 - M^2 - (E-E')^2 \\ &= 2M(E-E') \end{aligned}$$

となり，式 (D.13) が得られる．

D.3 $Q^2 = 2EE'(1-\cos\theta)$

$$\nu = E-E'$$

$$\mathrm{d}Q^2\mathrm{d}\nu = \frac{\partial(Q^2,\nu)}{\partial(\cos\theta, E')}\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}E'$$

ここで，変換の Jacobi 行列式は，

$$\begin{vmatrix} -2EE' & 2E(1-\cos\theta) \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2EE'$$

なので，結果が得られる．

訳者あとがき

自然界の根源を探求する試みは，古代ギリシャの時代から人類の最も重要な知的フロンティアのひとつであり続けてきたが，素粒子物理学者たちは20世紀後半(1970年代)に“標準模型(スタンダード・モデル)”を確立するに至った．対称性を破った複素スカラー場2重項を背景に据えて，基本フェルミオンとしてレプトン2種類，クォーク2種類×3色の“家族(ファミリー)”を3世代想定し，適当な局所的ゲージ対称性の要請に基づいてゲージボゾン場を導入するというだけの単純な模型に基づいて，重力を除く自然界の現象の広範な部分を原理的に記述できるようになったわけである．

しかしながら単純な模型とは言っても，これをひと通り理解するのはなかなか容易なことではない．一人の傑出した天才が理論体系を構築して“聖典”を纏めあげたニュートン力学などとは様子が違い，実に多くの，それぞれに傑出した研究者たちの様々な成果が統合され，集約された形で理論体系が成立しており，対象となる現象も，アプローチの方法も広範かつ多岐に及んでいる．標準模型は場の理論によって構築されているが，相対論的な場の量子論は本来的に煩瑣な計算手続きを伴うのみならず，“無限大”という原罪を負っており，理論的に座りが悪いことも状況を複雑にしている．このような事情の下で，標準模型の解説には，量子場を扱うための手の込んだ計算技術と抽象的な数理の話が必ず付いてまわることになり，初学者向けの素粒子論の教科書として手頃な良書は従来なかなか見当たらなかった．専門家向けの書籍であれば，多くの頁を使って難しいことを難しく解説してあってもよいかも知れないが，学部上級か大学院初年程度の学生が通読できる教科書を想

定するならば，むやみに大部では困るし，細部にこだわり過ぎたり題材過多であったりすると，むしろ本筋の部分や全体像が捉え難くなるという面もある．理工系学部のごく普通の学生が，予備知識もなくいきなり Itzykson and Zuber の労作 *Quantum Field Theory* 全 700 頁を (あるいは最近の学生なら Weinberg 全 3 巻だろうか？) 独力で読破するなどということは不可能に近いだろう．量子電磁力学を習得する前に力尽きて，$SU(2)$ や $SU(3)$ は遥か彼方といったところで沈没しかねないし，あの手の分厚い本は初学者にとってポイントを拾い読みするのも難しいようにできている．このような事情は大局的に見て，あまり好ましいことではないと思う．素粒子物理に色々な形で関わる人々，関心を持つ人々が皆，例外なく理論計算や量子場の“病理学”に精通しなければならないというわけでもないだろうし，最初から煩瑣な計算技術や精妙な場の数理に足を踏み入れなくても，基本となる勘所を押さえることによって，素朴に理解できる事柄は随分ある．

一方，読み易さを志向して書かれた素粒子論の書籍ももちろん存在するわけだが，従来のそのような書籍も素粒子論の本質を伝えることになかなか成功していないように見える．[読み易さ] ≒ [数式の少なさ] という考え方で基本的な数式とその説明を省いて手を抜いてしまうと，結局は一般向けの啓蒙書のように表層的な結果を紹介する“お話”になってしまい，論理的・演繹的な必然性が見えなくなる．

本書は大学院初年向けの講義を下敷きにして執筆された素粒子論の教科書であるが，本書に目を通すと，標準模型の成立から一世代の時間を経てようやく機が熟し，完成度の高い“教科書”が現れてきたという印象を受ける．標準模型の理論構成の骨組みが，見通しのよい順序で明快に語られており，学部の学生でもそれなりに納得して読める記述がなされている．また標準模型の正当性を支持する実験事実についても随所で要領よく触れられており，数値もよく整理された形で提示してあって，その点でも読んでいて心理的に安心できる．本書の優れた構成には，おそらく原著者たちの豊富な教育経験や専門書執筆の経験が生かされているのであろう．著者たちがやみくもに自分の守備範囲を披瀝するのではなく，どこまでをどのように読者に解らせるかというイメージを明確に設定していることが見てとれる．ポスト標準模型へと話を無闇に拡げないことも，この種の本の執筆におけるひとつの見識と言っ

てよいだろう．また記号の使い方にも独自の工夫がなされており，数式も非常に見やすい．とにかく教科書としての読み易さという点で，本書は在来の類書に比べて格段の進歩を遂げているように思われる．本書はあくまで“ひとつの入門書”(an introduction) にすぎないにしても，まれに見る良質の入門書と言ってよいと思う．

私は個人的な余技として物理書の翻訳に携わり続けているが，素粒子論の専門家ではないし，学生の頃から趣味として理論の専門書を読んできたとはいえ，理学部物理学科系統の教程で行われているような本式の大学・大学院レベルの物理学教育を受けた経験もない．それでも物理学に内在する基礎理論，統一理論，究極理論への指向性は感得できるし，初学者が専門書に何を求めるかということなら，むしろ専門家以上によく分かっている．本書の翻訳にあたっては国内の関連書籍にも目を通しながら，既存の訳語などはひと通り踏まえた上で訳出したが，どちらかと言うと玄人受けするというより，初学者向きの訳になっているのではないかと思う．表意機能の欠如した音訳カタカナ術語の氾濫を多少なりとも抑制し，慣用的な音訳語も尊重するために，“強粒子（ハドロン）”のような表記法をかなり意識的に採用したが，このような配慮は既存の類書にはほとんど見られないものである．

先験的に与えるパラメーターが少ないとは言えず，繰り込み処方を不可避的に含み，重力理論が欠如している標準模型は，もちろん究極理論ではないが，人類が自然界に対する知的認識を進展させてきた歴史の中で，究極理論に到達するための重要な一里塚と位置づけられてよいものであろう．私ができることは，優れた研究者たちが築き上げた自然観を，翻訳という作業を通じて，できるだけ解りやすい形で若い方々へと紹介するくらいのものである．もとより“巨人の肩”という具合にはいかないにしても，私の訳書のことを，無いよりは有ったほうが多少は便利な踏み石という程度に思っていただければ訳者として満足である．若い人が本格的な知的フロンティアへ参画してゆくためのひとつの足掛りとして，本書を役立てて頂けるならば幸いに思う．

2005 年 9 月
茨城県ひたちなか市にて

樺 沢 宇紀

索　　引

【著者】
W. N. コッティンガム（W. Noel Cottingham）
H. H. Wills Physics Laboratory at the University of Bristol
D. A. グリーンウッド（Derek A. Greenwood）
H. H. Wills Physics Laboratory at the University of Bristol

【訳者】
樺沢　宇紀（かばさわ　うき）
1990年　大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻前期課程修了
〃　㈱日立製作所 中央研究所 研究員
1996年　㈱日立製作所 電子デバイス製造システム推進本部 技師
1999年　㈱日立製作所 計測器グループ 技師
2001年　㈱日立ハイテクノロジーズ 技師
著書
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 1（共著, Nova Science, 1989年）
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 6（共著, Nova Science, 1990年）
訳書
『多体系の量子論』（シュプリンガー・ジャパン, 1999年）
『メソスコピック物理入門』（吉岡書店, 2000年）
『量子場の物理』（シュプリンガー・ジャパン, 2002年）
『ニュートリノは何処へ？』（シュプリンガー・ジャパン, 2002年）
『低次元半導体の物理』（シュプリンガー・ジャパン, 2004年）
『半導体デバイスの基礎』（全3巻, シュプリンガー・ジャパン, 2008年）
『現代量子論の基礎』（丸善プラネット, 2008年）
『現代量子力学入門』（丸善プラネット, 2009年）

素粒子標準模型入門

平成24年1月20日　発　行

訳　者　樺　沢　宇　紀

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　吉　田　明　彦

発行所　丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3263／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-3256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・日経印刷株式会社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-06195-4　C3042　Printed in Japan

本書は，2005年10月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より出版された同名書籍を再出版したものです．